

**DIFFERENZIERBARE VERZWEIGUNG
PERIODISCHER LÖSUNGEN VON
FUNKTIONALDIFFERENTIALGLEICHUNGEN**

Peter Dormayer

Disbui. München

1988

**Differenzierbare Verzweigung
periodischer Lösungen von
Funktionaldifferentialgleichungen**

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
an der Fakultät für Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Peter Dormayer
am 15. September 1987

Reichelt & Reichelt
Verlag
65000 Wiesbaden
Postfach 10 15
D 6500 Wiesbaden 10



1. Berichterstatter : Prof. Dr. H.O. Walther
2. Berichterstatter : Prof. Dr. J. Batt

Tag der mündlichen Prüfung : 18. März 1988



drucken + binden
gmbh
Schellingstraße 23
8000 München 40
☎ 089/28 44 45

INHALTSVERZEICHNIS

	Seite
0. Einleitung	1
I. Verzögerte Differentialgleichungen	9
1. Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen	9
2. Der Halbfluß für verzögerte Gleichungen	15
3. Die Poincaréabbildung für periodische Lösungen	24
4. Der Kaplan-Yorke-Zweig	32
5. Die Verzweigungsgleichung	44
II. Notwendige Bedingungen für Verzweigung	51
6. Die Variationsgleichung und die Fundamentallösung	51
7. Der Eigenwert -1	58
8. Die Bedingung " B (Kern A) $\neq$ Bild A "	68
9. Die kanonische Involution	77
10. Existenz eines Verzweigungspunktes	83
III. Ergänzungen und Beispiele	92
11. Ein Beispiel	92
12. Eine Gruppe von Transformationen	96
13. Lokale Beschreibung des Verzweigungspunktes	102
14. Abschließende Bemerkungen	106
Symbolverzeichnis	114
Literaturverzeichnis	115

0. EINLEITUNG

Funktionaldifferentialgleichungen und besonders die in dieser Arbeit untersuchten verzögerten Differentialgleichungen

$$\dot{x}(t) = f(x(t-\alpha)) \quad , \quad f \in C(\mathbb{R}) \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

sind in den letzten Jahren zunehmend Gegenstand der mathematischen Forschung geworden. Der Grund hierfür liegt wohl darin, daß eine Vielzahl physikalischer, chemischer und vor allem biologischer Modelle auf Gleichungen dieser Art führen.

Wir wollen als Beispiel die Wachstumsgleichung für eine Population von Individuen, etwa Bakterien auf einem geeigneten Nährboden betrachten.

Sei $n(t)$ die Zahl der Bakterien zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$. Die erste Annahme lautet dann:

*Die Wachstumsrate $\dot{n}(t)$ ist proportional
zur Zahl $n(t)$ von vorhandenen Individuen*

Dies führt auf die Gleichung

$$\dot{n}(t) = \lambda n(t)$$

mit einer Proportionalitätskonstanten $\lambda > 0$.

Die Lösung

$$n(t) = n(0) \cdot e^{\lambda t}$$

wächst exponentiell (für $n(0) > 0$) und kann somit nur für kleine Werte von $n(t)$ sinnvoll sein. Ein verbessertes Modell erhält man durch die Überlegung, daß sich die Bakterien bei Erreichen einer bestimmten Sättigungszahl N nicht mehr weiter vermehren. Die Wachstumsgleichung

$$\dot{n}(t) = \lambda n(t) \cdot \left(1 - \frac{n(t)}{N} \right)$$

hat nun einerseits die Eigenschaft, daß für kleine Werte von $n(t)$ gegenüber N die Wachstumsrate $\dot{n}(t)$ in 1. Näherung wieder proportional zu $n(t)$ ist, während andererseits N asymptotischer Gleichgewichtspunkt ist, d.h. es gilt:

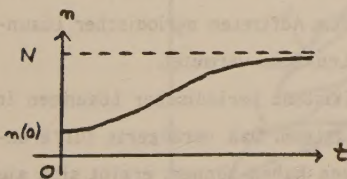


Bild 1

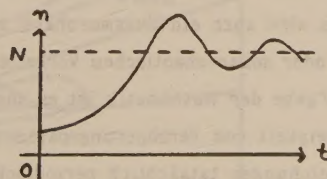


Bild 2

$$\lim_{t \rightarrow \infty} n(t) = N \text{ für } 0 < n(0) < N.$$

In Bild 1 wird eine typische Lösungskurve gezeigt.

Experimentell erhält man aber für das Verhalten der Bakterien auch gedämpfte Schwingungen (Bild 2). Dies läßt sich nicht durch weitere Korrekturen der obigen Gleichung erhalten, denn Lösungen von skalaren Differentialgleichungen der Form

$$\dot{n}(t) = f(n(t))$$

sind entweder konstant oder monoton wachsend oder fallend.

Eine weitere Verbesserung ergibt sich durch folgende Überlegung:

Die Bakterien brauchen eine gewisse Zeit $\alpha > 0$ um sich zu teilen. Liegt nun $n(t)$ nahe beim kritischen Wert N , bei dem die Teilungen aufhören, so können die Bakterien, die gerade mit der Teilung begonnen haben, erst zum Zeitpunkt $t + \alpha$ darauf reagieren, oder umgekehrt:

Die momentane Wachstumsrate hängt auch von der
Zahl $n(t - \alpha)$ der Bakterien zur Zeit $t - \alpha$ ab.

Dies führt auf folgende Gleichung:

$$\dot{n}(t) = \lambda n(t) \left(1 - \frac{n(t - \alpha)}{N} \right),$$

die wir durch die Substitution $x = \ln \frac{n}{N}$ auf die verzögerte Gleichung

$$\dot{x}(t) = f(x(t - \alpha))$$

mit $f(x) = 1 - e^x$ transformieren können.

Diese Gleichung wurde zum erstenmal von dem Biologen Hutchinson [9] 1948 vorgeschlagen.

Ähnliche Überlegungen für die Dichte von roten Blutkörperchen führen auf die Gleichung:

$$\dot{x}(t) = [c x(t - \alpha)]^B e^{-x(t - \alpha)} - s x(t)$$

(Mackey und Glass [13], Lasota und Wazewska-Czyzewska [12]).

Dabei beschreibt die Verzögerung α die Zeit zwischen dem Beginn der Zellproduktion im Rückenmark und ihrer Freigabe in den Blutkreislauf. Hier kann man experimentell für genügend große α ebenfalls schwingendes Verhalten feststellen. Es wird auch ein Zusammenhang zwischen dem Auftreten periodischer Lösungen (oder sogar chaotischem Verhalten) und Leukämie vermutet.

Aufgabe der Mathematik ist es somit, die Existenz periodischer Lösungen in Abhängigkeit vom Verzögerungsparameter α zu zeigen. Daß verzögerte Differentialgleichungen tatsächlich periodische Lösungen haben können, ergibt sich aus

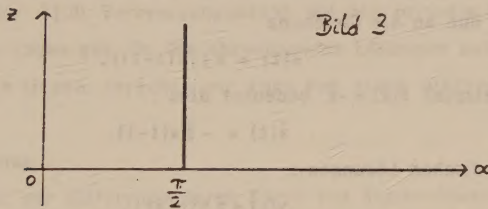
dem trivialen Beispiel

$$\dot{x}(t) = -x(t - \frac{1}{2})$$

Offensichtlich ist $x(t) = z \sin t$ periodische Lösung mit Amplitude $z > 0$. Wir wollen nun $f(0) = 0$ annehmen; dann ist natürlich $x(t) \equiv 0$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ Lösung von

$$\dot{x}(t) = f(x(t - \alpha)).$$

Um eine graphische Übersicht über den Zusammenhang zwischen dem Parameter α und den periodischen Lösungen zu erhalten, zeichnen wir zu jeder periodischen Lösung die Werte von α und der Amplitude z in ein Diagramm ein. Die α -Achse gehört dann stets in das Diagramm, da sie die Nulllösungen beschreibt, die natürlich die Amplitude 0 haben. Für $f(x) = -x$ erhalten wir dann folgendes Diagramm:



Bei $\alpha = \frac{1}{2}$ zweigen also periodische Lösungen von den trivialen Nulllösungen ab. Natürlich werden wir für kompliziertere Funktionen f auch kompliziertere Diagramme erwarten. Numerische Untersuchungen von D.Saupe [16] liefern z.B. für $f(x) = -\frac{x}{1+x^2}$ das Verzweigungsdiagramm:

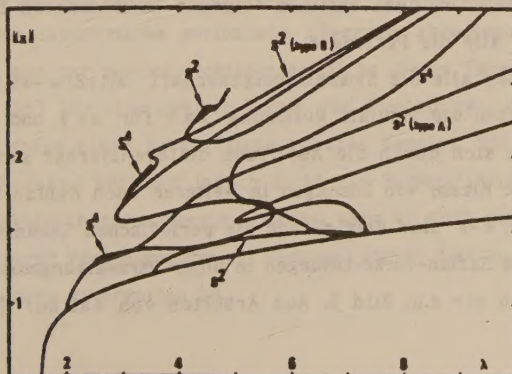


Bild 4

von dem der Autor selbst meint, es sei "perhaps confusing".

In diesem Bild erkennt man zunächst den bei $\alpha = \frac{1}{2}$ abzweigenden Ast wieder. Auf diesem Ast zweigen aber weitere periodische Lösungen ab, entlang derer wiederum weitere Verzweigungspunkte existieren. Das Diagramm legt nun sicher die Frage nahe, ob diese numerisch erhaltenen Verzweigungspunkte tatsächlich existieren, oder ob es sich dabei nur um "Scheinlösungen" handelt. Eine gewisse Vorsicht in diesem Zusammenhang wird auch durch die Arbeit "Special and Spurious Solutions of $\dot{x}(t) = -\alpha f(x(t-1))$ " von R.D.Nussbaum und H.O. Peitgen [14] verstärkt.

Das Diagramm läßt wohl auch vermuten, daß die Untersuchung dieser Frage nicht ganz einfach sein wird. Tatsächlich gibt es nur wenige Arbeiten hierzu; die beiden Wichtigsten wollen wir kurz darstellen.

Dazu normieren wir zunächst α durch die Transformation $t \mapsto \alpha t$ auf 1 und betrachten von nun an die Gleichung

$$(\alpha f) \quad \dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1)).$$

Für unser Beispiel $f(x) = -x$ bedeutet dies:

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{2}x(t-1)$$

mit den periodischen Lösungen:

$$x(t) = z \sin(\frac{1}{2}t).$$

Aus einer Arbeit von Kaplan und Yorke [11] erhält man für ungerade Funktionen f , die die Vorzeichenbedingung $x f(x) < 0$ für $x \neq 0$ erfüllen, ein Kontinuum periodischer Lösungen, die zugleich das Hamiltonsche System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(*) \quad \dot{x} = \alpha f(y), \quad \dot{y} = -\alpha f(x)$$

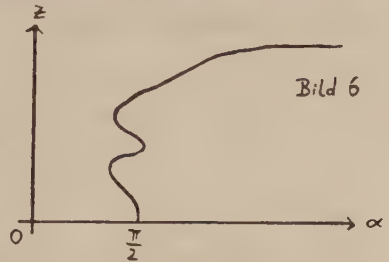
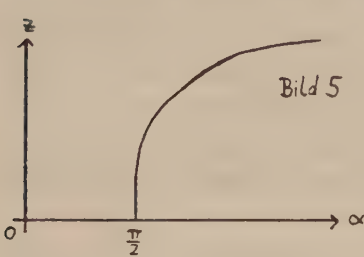
erfüllen (mit $y = x(-1)$).

Diese periodischen Lösungen besitzen folgende interessanten Eigenschaften:

- sie haben alle die Periode 4,
- sie erfüllen alle die Symmetrieeigenschaft $x(t+2) = -x(t), t \in \mathbb{R}$,
- sie enthalten die triviale Nulllösung $x \equiv 0$ für $\alpha = \frac{1}{2}$ und
- sie lassen sich durch die Amplitude differenzierbar parameterisieren.

Wir werden diese Klasse von Lösungen im weiteren auch Kaplan-Yorke-Lösungen nennen. Für $f(x) = -x$ sind dies gerade die periodischen Lösungen $z \sin(\frac{1}{2}t)$. Wenn wir nun die Kaplan-Yorke-Lösungen in unser Verzweigungsdiagramm einzeichnen, so erhalten wir z.B. Bild 5. Aus Arbeiten von Walther [17] und einer

früheren Arbeit des Autors [5], sowie numerischen Untersuchungen (z.B. in [2.S.44]) folgt aber, daß auch eine Situation wie in Bild 6 möglich ist.



Dadurch wird deutlich, daß der Verzögerungsparameter α als Verzweigungsparameter ungeeignet ist, da es zu gleichem α verschiedene Kaplan-Yorke-Lösungen geben kann. Wir verwenden daher die Amplitude als Verzweigungsparameter. In jedem Fall ist aber $(\frac{1}{2}, 0)$ Verzweigungspunkt, bei dem periodische Lösungen von den Nulllösungen abzweigen. Da die abzweigenden Lösungen auf einer differenzierbaren Kurve liegen, sprechen wir kurz von einem differenzierbaren Verzweigungspunkt.

Unsere Frage lautet nun :

Gibt es auf der differenzierbaren Kurve von Kaplan-Yorke-Lösungen weitere (differenzierbare) Verzweigungspunkte ?

Falls ja, so geht die Symmetrie $x(t+2) = -x(t)$ verloren, da diese Lösungen durch die Kaplan-Yorke-Gleichungen (*) beschrieben werden.

Wir können aber die Symmetrieeigenschaft weiter fassen durch

$$(S) \quad x(\cdot + \tau) = -x \quad \text{für ein } \tau > 0,$$

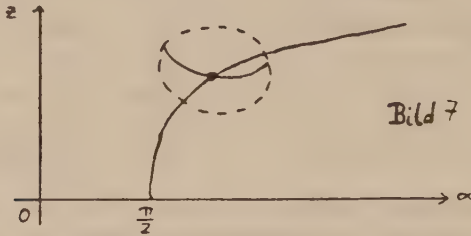
und somit unsere Fragestellung ergänzen :

Gibt es auf dem Kaplan-Yorke-Zweig einen Verzweigungspunkt, bei dem symmetrische periodische Lösungen abzweigen ?

Hier kommen wir nun zur zweiten wichtigen Arbeit zu diesem Thema.

Walther hat in [18] für eine gewisse Klasse von Gleichungen, die z.B. $f = -\sin$ enthält, die Existenz eines Verzweigungspunktes gezeigt. Die abzweigenden periodischen Lösungen besitzen jedoch nicht die Symmetrieeigenschaft (S). Da Walther mit Abbildungsgradtheorie arbeitet, kann er auch nicht zeigen, daß ein differenzierbarer Verzweigungspunkt vorliegt, obwohl dies aufgrund numerischer Untersuchungen zu erwarten ist.

Wir werden dagegen analytische Hilfsmittel benutzen und dadurch in der Lage sein, zum erstenmal die Existenz symmetrieeerhaltender, differenzierbarer Sekundärverzweigung zu beweisen.



Dieses analytische Hilfsmittel ist der Satz über die Verzweigung vom einfachen Eigenwert. Um diesen Satz anwenden zu können, müssen wir unser Verzweigungsproblem erst geeignet umformulieren. Dies ist Inhalt des ersten Kapitels dieser Arbeit. Im Abschnitt 1 stellen wir zunächst das Existenz- und Eindeutigkeitsproblem für verzögerte Differentialgleichungen, d.h. wir suchen einen Banachraum C "der Anfangswerte", so daß jedes Element $\varphi \in C$ eine Lösung unserer Gleichung definiert, und umgekehrt jede Lösung durch ein Element aus C beschrieben wird. Dabei muß auch der Lösungsbegriff geeignet formuliert werden. Als Ergebnis unserer Überlegungen werden wir den Banachraum $C = C([0,1])$ (versehen mit der sup-Norm) erhalten, wodurch neben der Existenz periodischer Lösungen ein weiterer wichtiger Unterschied zu gewöhnlichen Differentialgleichungen deutlich wird: Der Anfangswerteraum C ist unendlichdimensional. Als Nächstes werden wir einen Halbfluß $T^\alpha: \mathbb{R} \times C \rightarrow C$ zu (αf) definieren und die für das Weitere notwendigen Differenzierbarkeitseigenschaften in Abschnitt 2 bereitstellen. Wir gehen nun vor wie in [18], und konstruieren zu dem Halbfluß T^α eine Poincaréabbildung $P^\alpha: C_0 \rightarrow C_0$ ($C_0 \subseteq C$ geeignete Untermannigfaltigkeit mit Kodimension 1), womit wir die Suche nach periodischen Lösungen auf das Fixpunktproblem $P^\alpha \varphi = \varphi$, $\varphi \in C_0$ zurückgeführt haben. Da wir einen Verzweigungspunkt auf dem Kaplan-Yorke-Zweig suchen, wollen wir im Abschnitt 4 die Existenz des Kaplan-Yorke-Zweiges und eine Reihe wichtiger Eigenschaften beweisen. Bezeichnet nun φ^z den Anfangswert der Kaplan-Yorke-Lösung mit Amplitude $z > 0$ in C_0 und $\alpha = \alpha(z)$ die zugehörige Verzögerung, so gilt:

$$P^\alpha \varphi^z = \varphi^z \quad \text{bzw.} \quad P^\alpha \varphi^z - \varphi^z = 0.$$

Setzen wir

$$g(z, \varphi) = P^\alpha(\varphi^2 + \varphi) - \varphi^2 - \varphi \quad \text{für } z > 0, \varphi \in C_0,$$

so gilt: 1. $g(z, 0) = 0$ für alle z ,

2. ist $g(z, \varphi) = 0$ für ein $\varphi \in C_0, \varphi \neq 0$, so ist durch $\varphi^2 + \varphi \in C_0$ eine periodische Lösung von (af) , $\alpha = \alpha(z)$ gegeben, die nicht auf dem Kaplan-Yorke-Zweig liegt.

Damit liegt für die Verzweigungsgleichung

$$g(z, \varphi) = 0$$

genau die Situation vor, auf die wir den Satz über die Verzweigung vom einfachen Eigenwert anwenden können. In Abschnitt 5 zitieren wir eine Version dieses Satzes und bringen ihn auf eine für unsere Zwecke geeignete Form. In Kapitel II wollen wir nun die Voraussetzungen des Satzes über die Verzweigung vom einfachen Eigenwert in eine einfachere Form bringen.

Bei diesen Voraussetzungen handelt es sich ähnlich wie beim Satz über implizite Funktionen um Bedingungen an die Linearisierung der Verzweigungsgleichung. Wir können diese Linearisierung durch einen Operator $A^z \in L(C_0, C_0)$ beschreiben. Die Bedingungen lauten dann:

1. 0 ist geometrisch einfacher Eigenwert von A^z ,
2. A^z ist Fredholmoperator mit Index 0,
3. B^z (Kern A^z) $\not\subset$ Bild A^z mit $B^z = \frac{d}{dz} A^z \in L(C_0, C_0)$.

Falls sie erfüllt sind, ist z ein differenzierbarer Verzweigungspunkt.

Bevor wir nun diese Bedingungen untersuchen, beschreiben wir analog zu [18] in Abschnitt 6 den Operator A^z mit Hilfe der Fundamentallösung eines linearen gewöhnlichen Differentialgleichungssystem, das wir aus den Kaplan-Yorke-Gleichungen erhalten. Als Bedingung für $0 \in \sigma(A^z)$ finden wir in Abschnitt 7:

$$I(z) = \int_0^1 f'(x^z(t)) f^z(x^z(1-t)) dt = 0$$

(x^z sei die Kaplan-Yorke-Lösung mit Amplitude z).

Gleichzeitig können wir feststellen, daß 0 immer geometrisch einfacher Eigenwert ist, falls 0 überhaupt Eigenwert ist. Desgleichen ist A^z auch stets Fredholmoperator mit Index 0, so daß wir nur noch die Bedingung B^z (Kern A^z) $\not\subset$ Bild A^z untersuchen müssen. Das Ergebnis in Abschnitt 8 hierfür lautet:

$$J(z) = \int_0^1 f'(x^z(t)) f'(x^z(1-t)) dt \neq 0.$$

In den nächsten beiden Abschnitten wird es also darum gehen, Bedingungen für f zu finden, die die Existenz eines $z > 0$ mit $I(z) = 0, J(z) \neq 0$ garantieren. In Abschnitt 9 definieren wir dazu zwei Hilfsfunktionen, wobei wir explizit von der Tatsache Gebrauch machen, daß die Kaplan-Yorke-Gleichungen ein Hamiltonsches System bilden.

In Abschnitt 10 stellen wir schließlich eine Reihe von Voraussetzungen an f zusammen, aus denen nun insgesamt die Existenz eines differenzierbaren Verzweigungspunktes von

$$\dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1))$$

folgt.

Diese Voraussetzungen sind natürlich nur hinreichend und von technischer Natur. Immerhin erfüllt $f(x) = -\frac{x}{1-x^2}$ alle Voraussetzungen, so daß dadurch ein explizites Beispiel für Sekundärverzweigung gegeben ist.

Wir zeigen dies in Abschnitt 11.

In Abschnitt 12 geben wir eine interessante Gruppe von Transformationen an, die es erlauben, aus einer gegebenen symmetrischen Lösung neue Lösungen zu konstruieren. Diese Transformationen wurden im wesentlichen von Cooke (vgl. [10]) und Saupe [16] angegeben. Mit ihrer Hilfe läßt sich der Verzweigungspunkt lokal genauer beschreiben; wir zeigen z.B. in Abschnitt 13, daß sich der abzweigende Ast durch die Periode differenzierbar parameterisieren läßt. Wir beenden diese Arbeit mit abschließenden Bemerkungen in Abschnitt 14, wo wir etwa feststellen, daß sich Sekundärverzweigung auch für die größere Klasse

$$\dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1), x(t-3), \dots, x(t-2n-1)) \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0$$

verzögerter Differentialgleichungen zeigen läßt.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. H.O. Walther für die Anregung zu dieser Arbeit und der auch in anderem Zusammenhang gewährten Unterstützung bedanken.

Desweiteren sei der Studienstiftung des deutschen Volkes gedankt, die mein Studium und diese Arbeit finanziell gefördert hat.

KAPITEL I : VERZÜGERTE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Wir benötigen zunächst einige Tatsachen aus der Theorie der Funktionaldifferentialgleichungen, etwa die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen, den dadurch induzierten Halbfluß und seine Differenzierbarkeitseigenschaften usw. Alle diese Aussagen findet man z.B. in [8]. Für verzögerte Differentialgleichungen lassen sich die Beweise jedoch wesentlich vereinfachen. Wir stellen daher zunächst die für diese Arbeit wichtigen Tatsachen ausführlich zusammen.

1. Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Wir betrachten die verzögerte Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = f(x(t-\alpha)) \quad (\alpha, f)$$

mit stetigem $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und suchen periodische Lösungen in Abhängigkeit vom Verzögerungsparameter $\alpha \in \mathbb{R}$. Dabei dürfen wir $\alpha \neq 0$ annehmen, da $\alpha = 0$ auf die gewöhnliche Differentialgleichung $\dot{x}(t) = f(x(t))$ führt.

Für $\alpha \neq 0$ kann aber die Transformation $t \mapsto \alpha t$ durchgeführt werden, die die Gleichung (α, f) überführt auf

$$\dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1)). \quad (\alpha f)$$

Wir wollen im folgenden nur noch diese Gleichung betrachten. Wie für die gewöhnliche Differentialgleichung stellen sich zunächst folgende Fragen :

- wie läßt sich ein geeigneter Lösungsbegriff für (αf) definieren ?
- wie läßt sich ein Anfangswertproblem für (αf) stellen, d.h. wie kann man Lösungen von (αf) in eindeutiger Weise festlegen ?
- wie erhält man für (αf) einen "differenzierbaren Fluß" auf dem Raum der Anfangswerte ?

Zur Beantwortung dieser Fragen wollen wir folgende Vorüberlegungen anstellen : Betrachtet man (αf) , so erkennt man zunächst :

Ist eine "Lösung" x auf einem Intervall der Länge 1, etwa $[t_0, t_0+1]$, $t_0 \in \mathbb{R}$, bekannt, so legt die Gleichung (αf) $\dot{x}(t)$, und damit auch $x(t)$, fest für $t \in [t_0+1, t_0+2]$. Entsprechend erhält man $x(t)$ für $t \in [t_0+2, t_0+3], \dots$, d.h. :

Ist x auf $[t_0, t_0+1]$ bekannt, so auch auf $[t_0, \infty[$.

Wir benutzen diese Beobachtung zur Definition des Lösungsbegriffes (mit $t_0 = 0$) :

Definition 1.1

Sei $f \in C(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$; sei $C = C([0,1])$ versehen mit der sup-Norm.

1. Eine stetige Abbildung $x: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Lösung von

$$\dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1)), \quad (\alpha f)$$

wenn gilt:

a. x ist auf $]1, \infty[$ differenzierbar und in $t=1$ existiert die rechtsseitige Ableitung,

b. für alle $t \geq 1$ gilt $\dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1))$.

2. Sei $\varphi \in C$; eine stetige Abbildung $x: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ heißt Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1)), \quad t \geq 1, \quad x|_{[0,1]} = \varphi, \quad (\alpha f, \varphi)$$

wenn x Lösung von (αf) und $x|_{[0,1]} = \varphi$ ist.

3. Eine stetige Abbildung $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt periodische Lösung von (αf) , wenn x periodisch und $x|_{\mathbb{R}_0^+}$ Lösung von (αf) ist.

Mit den vorherigen Überlegungen erwarten wir nun folgende Existenz- und Eindeutigkeitsaussage:

Lemma 1.1

Sei $f \in C(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C$. Dann gibt es genau eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1)), \quad t \geq 1, \quad x|_{[0,1]} = \varphi, \quad (\alpha f, \varphi)$$

Bevor wir dieses Lemma beweisen, wollen wir noch einige Bemerkungen zum obigen Lösungsbegriff machen:

1. In der Literatur wird häufig $[-1,0]$ als Anfangsintervall gewählt, anstelle von $[0,1]$.

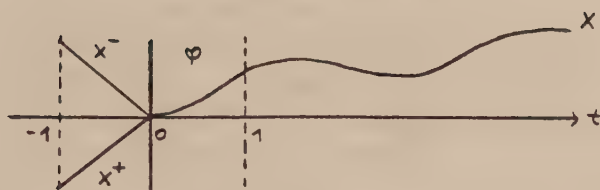
2. Für Lemma 1.1 ist es wichtig, daß wir die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen nur auf $\mathbb{R}_0^+$ fordern. Die Lösung x des Anfangswertproblems $(\alpha f, \varphi)$ läßt sich nämlich i.A. nicht so auf ein Intervall $[-\varepsilon, \infty[$, $\varepsilon > 0$ fortsetzen, daß x auf $[1-\varepsilon, \infty[$ differenzierbar ist mit $\dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1))$ für $t > 1-\varepsilon$, da hieraus folgt, daß φ in 1 (linksseitig) differenzierbar ist.

Falls sich x aber fortsetzen läßt, so muß diese Fortsetzung nicht eindeutig sein. Betrachten wir etwa $f(x) = x^2$, $\alpha = 1$ und

$$\varphi(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(t-1)^2, \quad t \in [0,1], \quad \varphi(0) = 0.$$

Sei $x: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ die Lösung von $(\alpha f, \varphi)$ und

$$x^*(t) = \begin{cases} \pm t & \text{für } -1 \leq t \leq 0 \\ x(t) & \text{für } t \geq 0 \end{cases}.$$



Dann sind $x^*: [-1, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ stetig, $x^*|_{[0,1]} = \varphi$ und wegen $x^*|_{\mathbb{R}_+} = x$ gilt:

$$\dot{x}^*(t) = [x^*(t-1)]^2 \quad \text{für } t \geq 1.$$

Für $t \in [0,1]$ gilt wegen $x^*(t-1) = \pm(t-1)$:

$$x^*(t) = x(t) = \varphi(t) \implies \dot{x}^*(t) = \dot{\varphi}(t) = (t-1)^2 = [x^*(t-1)]^2,$$

d.h.:

x^* sind zwei verschiedene Lösungen auf $[-1, \infty[$ mit $x^*|_{[0,1]} = \varphi$.

Aus diesem Grund dürfen wir auch nicht erwarten, daß wir einen Fluß auf dem Raum C der Anfangswerte zu (αf) konstruieren können; stattdessen werden wir uns mit einem Halbfluß zufrieden geben müssen.

3. Sei $x: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ Lösung von (αf) ; da x und f stetig sind, ist $\dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1))$ für $t \geq 1$ stetig, d.h. x ist auf $[1, \infty[$ stetig differenzierbar. Allgemeiner gilt: Ist f C^k -Abbildung, so ist x für alle $j = 0, \dots, k+1$ C^j -Abbildung auf $[j, \infty[$.

4. Ist $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodische Lösung, so ist nach Definition x periodisch und $\dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1))$ für $t \geq 1$, also x auf $[1, \infty[$ stetig differenzierbar.

Wegen der Periodizität gilt aber sogar:

$$x \text{ ist auf } \mathbb{R} \text{ stetig differenzierbar und } \dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1)) \text{ für } t \in \mathbb{R},$$

d.h. x ist "Lösung" auf ganz $\mathbb{R}$.

Damit zum

Beweis von Lemma 1.1:

Sei also $f \in C(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C$.

a. Wir konstruieren zunächst induktiv zu $k \in \mathbb{N}_0$ eine stetige Abbildung

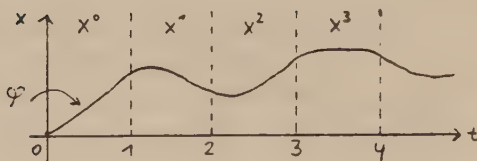
$x^k: [0, k+1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $x^k|_{[0,1]} = \varphi$

(ii) $x^k|_{[0, n+1]} = x^n$ für $0 \leq n \leq k$

(iii) x^k ist für $k \geq 1$ differenzierbar auf $[1, k+1]$ mit

$$\dot{x}^h(t) = \alpha f(x^h(t-1)) \quad , \quad t \in [1, k+1[.$$



Für $k=0$ erfüllt $x^0 = \varphi$ alle Aussagen.

Sei $x^h : [0, k+1] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$ definiert, so daß (i), (ü), ($\bar{u}$) gelten.

Sei

$$x^{h+1}(t) = \begin{cases} x^h(t) & t \in [0, k+1] \\ x^h(k+1) + \alpha \int_k^{t-1} f(x^h(s)) ds & t \in [k+1, k+2] \end{cases}$$

dann ist x^{h+1} auf $[0, k+2]$ definiert und stetig und es gilt $x^{h+1}|_{[0, k+1]} = x^h$. Damit erfüllt x^{h+1} (i) und (ü). Weiter ist x^{h+1} differenzierbar auf $[1, k+1[$ und auf $]k+1, k+2[$.

Für $1 \leq t < k+1$ gilt wegen ($\bar{u}$): $\dot{x}^{h+1}(t) = \dot{x}^h(t) = \alpha f(x^h(t-1)) = \alpha f(x^{h+1}(t-1))$, und nach Definition von x^{h+1} gilt auch $\dot{x}^{h+1}(t) = \alpha f(x^{h+1}(t-1))$ für $k+1 < t < k+2$.

Damit muß nur noch gezeigt werden, daß für $t=k+1$ die links- und rechtsseitigen Ableitungen von x^{h+1} existieren und übereinstimmen, so daß $\dot{x}^{h+1}(k+1)$ existiert, und daß gilt:

$$\dot{x}^{h+1}(k+1) = \alpha f(x^{h+1}(k+1-1)).$$

Für die linksseitige Ableitung erhalten wir:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [x^{h+1}(k+1) - x^{h+1}(k+1-h)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [x^h(k+1) - x^h(k+1-h)] = \dot{x}^h(k+1) = \\ &= \alpha f(x^h(k)); \end{aligned}$$

und für die rechtsseitige Ableitung:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [x^{h+1}(k+1+h) - x^{h+1}(k+1)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha}{h} \int_k^{k+h} f(x^h(s)) ds = \alpha f(x^h(k)).$$

b. Sei $t \geq 0$. Dann gibt es $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k \leq t < k+1$. Sei $x(t) = x^h(t)$.

Damit erhalten wir eine Abbildung $x: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, für die wegen (i) $x|_{[0,1]} = x^0 = \varphi$ gilt. Weiter ist x stetig und wegen (ü) gilt $x|_{[0, k+1]} = x^h$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Wegen ($\bar{u}$) ist somit $\dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1))$ für alle $t \in [1, k+1]$ und alle $k \in \mathbb{N}_0$, also für alle $t \geq 1$. Damit ist x Lösung des Anfangwertproblems $(\alpha f, \varphi)$.

c. Sei $y: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ ebenfalls Lösung des Anfangwertproblems. Wir zeigen durch Induktion: $y|_{[0, k+1]} = x^k$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

Dies genügt für die Eindeutigkeit, denn ist $y|_{[0, k+1]} = x|_{[0, k+1]}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, so ist natürlich $y = x$.

Für $k=0$ ist $y|_{[0, 1]} = \varphi = x^0$. Sei $y|_{[0, k+1]} = x^k$. Dann gilt für $t \in [0, k+1]$:

$$y(t) = x^k(t) = x^{k+1}(t);$$

ist $t \in]k+1, k+2]$, so folgt, da y Lösung ist:

$$\begin{aligned} y(t) &= y(k+1) + \int_{k+1}^t \dot{y}(s) ds = y(k+1) + \int_{k+1}^t \alpha f(y(s-1)) ds = \\ &= x^{k+1}(k+1) + \int_{k+1}^t \alpha f(x^{k+1}(s-1)) ds = x^{k+1}(k+1) + \int_{k+1}^t \dot{x}^{k+1}(s) ds = \\ &= x^{k+1}(t), \end{aligned}$$

also gilt $y(t) = x^{k+1}(t)$ für $0 \leq t \leq k+2$ bzw. $y|_{[0, k+2]} = x^{k+1}$. ■

Offensichtlich läßt sich das Anfangswertproblem $(\alpha f, \varphi)$ sofort durch schrittweise Integration lösen. Die Behandlung verzögerter Differentialgleichungen erscheint also im Vergleich zu gewöhnlichen Differentialgleichungen wesentlich einfacher. Es gibt aber zwei wichtige Unterschiede:

- nicht konstante, periodische Lösungen sind möglich,
- der Raum C der Anfangswerte ist unendlichdimensional.

Lemma 1.1 gibt Anlaß zu folgender

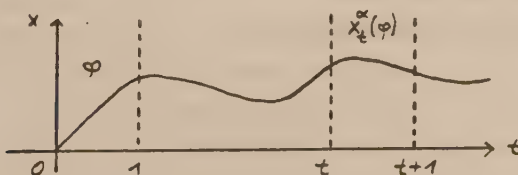
Definition 1.2

Sei $f \in C(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Ist $\varphi \in C$, so sei $x^\alpha(\cdot, \varphi): \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ die eindeutig bestimmte Lösung des Anfangswertproblems

$$\dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1)), \quad t \geq 1, \quad x|_{[0, 1]} = \varphi \quad (\alpha f, \varphi)$$

2. Für $\varphi \in C$, $t \in \mathbb{R}_0^+$ sei $x_t^\alpha(\varphi) = x^\alpha(t + \cdot, \varphi)|_{[0, 1]} \in C$.



3. Die Abbildung

$$T^\alpha: \mathbb{R}_0^+ \times C \ni (t, \varphi) \mapsto x_t^\alpha(\varphi) \in C$$

heißt Lösungsoperator von (af).

Weiter sei die Abbildung $T: \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \times C \longrightarrow \mathbb{R} \times C$ definiert durch:

$$T(t, \alpha, \varphi) = (\alpha, x_t^\alpha(\varphi)).$$

Wir wollen als Nächstes zeigen, daß der Lösungsoperator T^α einen Halbfluß auf C definiert:

Lemma 1.2

Sei $f \in C(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist T^α ein Halbfluß auf C , d.h. es gilt:

a. $x_0^\alpha(\varphi) = \varphi$ für alle $\varphi \in C$,

b. $x_t^\alpha(x_s^\alpha(\varphi)) = x_{t+s}^\alpha(\varphi)$ für alle $\varphi \in C$ und $t, s \in \mathbb{R}_0^+$.

Beweis:

a. Für $s \in [0, 1]$ gilt: $x_0^\alpha(\varphi)(s) = x^\alpha(s, \varphi) = \varphi(s)$, also ist $x_0^\alpha(\varphi) = \varphi$.

b. Sei $s \geq 0$ und $u = x^\alpha(., x_s^\alpha(\varphi))$; dann ist u Lösung des Anfangwertproblems für $x_s^\alpha(\varphi)$. Sei weiter $v = x^\alpha(., s, \varphi)|_{\mathbb{R}_0^+} : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$.

Dann gilt für $\sigma \in [0, 1]$:

$$v(\sigma) = x^\alpha(\sigma + s, \varphi) = x_s^\alpha(\varphi)(\sigma), \text{ d.h. es ist } v|_{[0, 1]} = x_s^\alpha(\varphi).$$

Für $\sigma \geq 1$ ist $\sigma + s \geq 1$, d.h. v ist in σ differenzierbar und

$$\dot{v}(\sigma) = \dot{x}^\alpha(\sigma + s, \varphi) = \alpha f(x^\alpha(\sigma + s - 1, \varphi)) = \alpha f(v(\sigma - 1)).$$

Also ist v ebenfalls Lösung des Anfangwertproblems für $x_s^\alpha(\varphi)$. Wegen der Eindeutigkeit folgt somit $u = v$ bzw. für $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} x_t^\alpha(x_s^\alpha(\varphi)) &= x^\alpha(t + ., x_s^\alpha(\varphi))|_{[0, 1]} = u(t + .)|_{[0, 1]} = v(t + .)|_{[0, 1]} = \\ &= x^\alpha(t + s + ., \varphi)|_{[0, 1]} = x_{t+s}^\alpha(\varphi) \end{aligned}$$

Corollar 1.1

T ist Halbfluß auf $\mathbb{R} \times C$.

Beweis:

Für $t, s \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\varphi \in C$ gilt:

$$T(t + s, \alpha, \varphi) = (\alpha, x_{t+s}^\alpha(\varphi)) = (\alpha, x_t^\alpha(x_s^\alpha(\varphi))) = T(t, \alpha, x_s^\alpha(\varphi)) = T(t, T(s, \alpha, \varphi)).$$

2. Der Halbfluß für verzögerte Differentialgleichungen

Wir wollen in diesem Abschnitt zeigen, daß der Halbfluß T stetig ist, und seine Differenzierbarkeitseigenschaften untersuchen. Dazu folgender

Hilfssatz

Sei $u:]a, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $a \geq 1$ stetig und k -mal stetig differenzierbar, $k \in \mathbb{N}$.

Dann ist auch

$$]a, \infty[\ni t \mapsto u_t = u(t+.)|_{[0,1]} \in C$$

stetig und k -mal stetig differenzierbar mit $(u_t)' = (\dot{u})_t$.

Beweis :

Wir zeigen zunächst, daß $t \mapsto u_t$ in allen $t > a$ stetig und stetig differenzierbar ist mit $(u_t)' = (\dot{u})_t$.

Dazu sei $\varepsilon > 0$. Da nach Voraussetzung u und $\dot{u}$ stetig, also auf $[\frac{1}{2}(a+t), t+2]$ gleichmäßig stetig sind, gibt es $\delta > 0$ mit

$$(*) \quad \begin{aligned} &|u(t_1) - u(t_2)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\dot{u}(t_1) - \dot{u}(t_2)| < \frac{\varepsilon}{2} \\ &\text{für alle } t_1, t_2 \in [\frac{1}{2}(a+t), t+2] \text{ mit } |t_1 - t_2| < \delta. \end{aligned}$$

Sei o.B. $\delta \leq 1$, $\delta \leq \frac{1}{2}(t-a)$. Für alle $s \in \mathbb{R}$ mit $|s| < \delta$ und alle $\sigma \in [0,1]$ gilt dann:

$$\frac{1}{2}(a+t) \leq t \leq t+\sigma \leq t+2, \text{ also } t+\sigma \in [\frac{1}{2}(a+t), t+2],$$

$$\frac{1}{2}(a+t) \leq t-\delta < t+s \leq t+s+\sigma \leq t+\delta+\sigma \leq t+2,$$

also ebenfalls $t+s+\sigma \in [\frac{1}{2}(a+t), t+2]$.

Wegen $|(t+s+\sigma) - (t+\sigma)| = |s| < \delta$ und $(*)$ folgt somit :

$$|u_{t,s}(\sigma) - u_t(\sigma)| = |u(t+s+\sigma) - u(t+\sigma)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

bzw.

$$\|u_{t,s} - u_t\| = \sup_{\sigma \in [0,1]} |(u_{t,s} - u_t)(\sigma)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

für $|s| < \delta$, womit die Stetigkeit von $t \mapsto u_t$ gezeigt ist.

Sei nun wieder $s \in \mathbb{R}$, $|s| < \delta$ und $\sigma \in [0,1]$. Dann gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $\theta \in [0,1]$ mit

$$u(t+s+\sigma) - u(t+\sigma) = s \cdot \dot{u}(t+\sigma+\theta \cdot s),$$

und wegen $|\theta s| = \theta |s| < 1 \cdot \delta$ gilt wieder mit $(*)$:

$$|\dot{u}(t+\sigma+\theta \cdot s) - \dot{u}(t+\sigma)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Damit folgt :

$$|u_{t,s}(\sigma) - u_t(\sigma) - s \cdot (\dot{u})_t(\sigma)| = |u(t+s+\sigma) - u(t+\sigma) - s \dot{u}(t+\sigma)| =$$

$$= |s \cdot \dot{u}(t+\theta \cdot s) - s \cdot \dot{u}(t+\theta)| \\ < |s| \cdot \frac{\varepsilon}{2}$$

oder

$$\|u_{t+s} - u_t - s \cdot (\dot{u}_t)\| = \sup_{\sigma \in [0,1]} |u_{t+s}(\sigma) - u_t(\sigma) - s \cdot (\dot{u}_t)(\sigma)| \leq |s| \cdot \frac{\varepsilon}{2} \leq |s| \cdot \varepsilon,$$

woraus die Differenzierbarkeit von u_t und $(u_t)' = (\dot{u})_t$ folgt.

Da $\dot{u}$ stetig ist, folgt aus dem schon Bewiesenen auch die Stetigkeit von $(\dot{u})_t$.

Damit ist der Hilfssatz für $k=1$ gezeigt. Ist nun die Behauptung für $k-1$ richtig, so ist $(\dot{u}_t) = (\dot{u})_t$ $(k-1)$ -mal stetig differenzierbar, da $\dot{u}$ $(k-1)$ -mal stetig differenzierbar ist. Also ist $t \mapsto u_t$ k -mal stetig differenzierbar. ■

Damit zeigen wir:

Lemma 2.1

Sei $f \in C^k(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $T: \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R} \times C$ stetig und auf $]k, \omega[\times \mathbb{R} \times C$ k -mal stetig differenzierbar.

Die Abbildung $]1, \omega[\times \mathbb{R} \times C \ni (t, \alpha, \varphi) \mapsto DT(t, \dots)(\alpha, \varphi) \in L(\mathbb{R} \times C, \mathbb{R} \times C)$ ist im Fall $k \geq 2$ stetig differenzierbar.

Beweis:

Wir zeigen die Behauptung für jede Komponente von T .

1. Sei $(\alpha, \varphi) \in \mathbb{R} \times C$; dann ist $T(\cdot, \alpha, \varphi): \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} \times C$ stetig und k -mal stetig differenzierbar auf $]k, \omega[$:

Sei $k=1$. Dann ist $u: \mathbb{R}_0^+ \ni t \mapsto x^\alpha(t, \varphi) \in \mathbb{R}$ stetig und auf $]1, \omega[$ stetig differenzierbar. Wegen $u_t = x^\alpha(t + \cdot, \varphi)|_{[0,1]} = x_t^\alpha(\varphi)$ folgt aus dem Hilfssatz, daß $t \mapsto u_t$ auf $]1, \omega[$ stetig und stetig differenzierbar ist, also auch $t \mapsto T(\cdot, \alpha, \varphi)(t) = (\alpha, x_t^\alpha(\varphi))$. Da u auf $]k, \omega[$ k -mal stetig differenzierbar ist, folgt dies analog auch für $T(\cdot, \alpha, \varphi)$.

2. Sei $t \in \mathbb{R}_0^+$; dann ist $T_t = T(t, \dots): \mathbb{R} \times C \rightarrow \mathbb{R} \times C$ stetig und k -mal stetig differenzierbar:

Es genügt, dies für $t \in [0,1]$ zu zeigen, denn ist $t > 1$, so gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $\tau = \frac{1}{n} \in [0,1]$ und da T Halbfluß ist, ist $T_t = T_{n\tau} = T_\tau \circ \dots \circ T_\tau$ C^k -Abbildung, falls T_τ C^k -Abbildung ist.

Sei also $t \in [0,1]$. Wegen $T_t(\alpha, \varphi) = (\alpha, x_t^\alpha(\varphi))$ müssen wir unsere Behauptung nur für $\mathbb{R} \times C \ni (\alpha, \varphi) \mapsto x_t^\alpha(\varphi) \in C$ zeigen.

Für alle $s \in [0,1]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C$ gilt zunächst:

$$x^\alpha(t+s, \varphi) = \begin{cases} \varphi(t+s) & \text{für } 0 \leq t+s \leq 1 \\ \varphi(1) + \int_0^{t+s-1} \alpha f(\varphi(\sigma)) d\sigma & \text{für } 1 \leq t+s \leq 2 \end{cases} \quad (*)$$

Behauptung: T_1 ist stetig:

Sei $(\alpha, \varphi) \in \mathbb{R} \times C$. Wir zeigen: T_1 ist stetig in (α, φ) .

Dazu sei $\varepsilon > 0$ und

$$K = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 1 + \|\varphi\| \} \subseteq \mathbb{R}.$$

Auf der kompakten Menge K ist f gleichmäßig stetig, d.h. es gibt $\delta > 0$ mit:

$$|\alpha(f(x) - f(y))| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ für alle } x, y \in K \text{ mit } |x - y| < \delta.$$

Weiter gibt es $M > 0$ mit

$$|f(x)| \leq M \text{ für alle } x \in K.$$

Wir dürfen o.B. $\delta < \frac{\varepsilon}{3M+3} < \frac{\varepsilon}{3}$ und $\delta \leq 1$ annehmen.

Sei nun $(\beta, \psi) \in \mathbb{R} \times C$ mit $|\beta - \alpha| < \delta$ und $\|\psi - \varphi\| < \delta$. Wir wollen

$$\|x_t^\beta(\psi) - x_t^\alpha(\varphi)\| < \varepsilon$$

zeigen, womit die Behauptung bewiesen wäre.

Für $s \in [0, 1]$ gilt mit (*):

1. Fall $0 \leq t+s \leq 1$:

$$\text{Dann ist } x^\alpha(t+s, \varphi) = \varphi(t+s), \quad x^\beta(t+s, \psi) = \psi(t+s)$$

also:

$$|x^\beta(t+s, \psi) - x^\alpha(t+s, \varphi)| = |\psi(t+s) - \varphi(t+s)| \leq \|\psi - \varphi\| < \delta < \frac{\varepsilon}{3} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

2. Fall $1 \leq t+s \leq 2$:

Sei $0 \leq \sigma \leq t+s-1$, also $\sigma \in [0, 1]$ und:

$$|\varphi(\sigma)| \leq \|\varphi\| \leq 1 + \|\varphi\|,$$

$$|\psi(\sigma)| \leq \|\psi\| \leq \|\psi - \varphi\| + \|\varphi\| < \delta + \|\varphi\| \leq 1 + \|\varphi\|,$$

d.h. es sind $\varphi(\sigma), \psi(\sigma) \in K$ und wegen $|\psi(\sigma) - \varphi(\sigma)| < \delta$ gilt:

$$|\alpha[f(\psi(\sigma)) - f(\varphi(\sigma))]| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |f(\psi(\sigma))| \leq M.$$

Mit (*) erhalten wir:

$$\begin{aligned} |x^\beta(t+s, \psi) - x^\alpha(t+s, \varphi)| &= \\ &= |\psi(1) - \varphi(1) + \int_0^{t+s-1} [\beta f(\psi(\sigma)) - \alpha f(\varphi(\sigma))] d\sigma| \\ &\leq |\psi(1) - \varphi(1)| + \int_0^{t+s-1} |\beta f(\psi(\sigma)) - \alpha f(\varphi(\sigma))| d\sigma \\ &\leq \|\psi - \varphi\| + \int_0^{t+s-1} [|\beta - \alpha| f(\psi(\sigma))| + |\alpha[f(\psi(\sigma)) - f(\varphi(\sigma))]|] d\sigma \\ &\leq \delta + |\beta - \alpha| \cdot \int_0^{t+s-1} |f(\psi(\sigma))| d\sigma + \int_0^{t+s-1} |\alpha[f(\psi(\sigma)) - f(\varphi(\sigma))]| d\sigma \\ &\leq \delta + \delta \cdot \int_0^{t+s-1} M d\sigma + \int_0^{t+s-1} \frac{\varepsilon}{3} d\sigma = \delta + (\delta M + \frac{\varepsilon}{3}) \cdot (t+s-1) \end{aligned}$$

$$\leq \delta + \delta M + \frac{\epsilon}{3} < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} \\ = \frac{2}{3} \epsilon.$$

Es ist also stets :

$$|x^\beta(t+s, \varphi) - x^\alpha(t+s, \varphi)| < \frac{2}{3} \epsilon, \quad s \in [0, 1],$$

bzw.:

$$\|x_t^\beta(\varphi) - x_t^\alpha(\varphi)\| = \sup_{s \in [0, 1]} |x^\beta(t+s, \varphi) - x^\alpha(t+s, \varphi)| \leq \frac{2}{3} \epsilon < \epsilon,$$

womit die Stetigkeit von T_t gezeigt ist.

Behauptung: T_t ist k -mal stetig differenzierbar in α .

Sei $\varphi \in C$ und $\eta \in C$ sei definiert durch :

$$\eta(s) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t+s \leq 1 \\ \int_0^{t+s-1} f(\varphi(\sigma)) d\sigma & \text{für } 1 \leq t+s \leq 2 \end{cases};$$

η ist stetig auf $[0, 1]$, da das Integral bei $t+s=1$ verschwindet.

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt nun mit (*):

$$x_t^\beta(\varphi) - x_t^\alpha(\varphi) = (\beta - \alpha) \cdot \eta,$$

denn ist $s \in [0, 1]$, so gilt :

1. Fall : $0 \leq t+s \leq 1$

$$x_t^\beta(\varphi)(s) - x_t^\alpha(\varphi)(s) = x^\beta(t+s, \varphi) - x^\alpha(t+s, \varphi) = \varphi(t+s) - \varphi(t+s) = 0 = (\beta - \alpha) \cdot \eta(s),$$

2. Fall : $1 \leq t+s \leq 2$

$$\begin{aligned} x_t^\beta(\varphi)(s) - x_t^\alpha(\varphi)(s) &= x^\beta(t+s, \varphi) - x^\alpha(t+s, \varphi) = \\ &= \varphi(1) + \int_0^{t+s-1} \beta f(\varphi(\sigma)) d\sigma - \varphi(1) - \int_0^{t+s-1} \alpha f(\varphi(\sigma)) d\sigma = \\ &= (\beta - \alpha) \cdot \int_0^{t+s-1} f(\varphi(\sigma)) d\sigma = \\ &= (\beta - \alpha) \cdot \eta(s). \end{aligned}$$

Aus $x_t^\beta(\varphi) - x_t^\alpha(\varphi) = (\beta - \alpha) \cdot \eta$ folgt aber die Differenzierbarkeit von $\alpha \mapsto x_t^\alpha(\varphi)$ und

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} x_t^\alpha(\varphi) = \eta, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Da η nicht von mehr von α abhängt, folgt aber der Rest der Behauptung.

Behauptung : Sei $k \geq 1$. Dann ist T_t stetig differenzierbar in φ .

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$; wir zeigen :

$$x_t^\alpha : C \ni \varphi \mapsto x_t^\alpha(\varphi) \in C \text{ ist stetig differenzierbar.}$$

Dazu definieren wir zu $\varphi \in C$, $\zeta \in C$, $s \in [0, 1]$ eine Abbildung $L_t^\alpha(\varphi) : C \rightarrow C$ durch :

$$L_t^\alpha(\varphi)(\zeta)(s) = \begin{cases} \zeta(t+s) & 0 \leq t+s \leq 1 \\ \zeta(1) + \int_0^{t+s-1} \alpha f'(\varphi(\sigma)) \zeta(\sigma) d\sigma & \text{für } 1 \leq t+s \leq 2 \end{cases}$$

Da das Integral für $t+s=1$ verschwindet, ist $L_t^\alpha(\varphi)(\zeta)$ eine stetige Abbildung von $[0,1]$ nach $\mathbb{R}$, d.h. es ist $L_t^\alpha(\varphi)(\zeta) \in \mathbb{C}$.

Die Abbildung $L_t^\alpha(\varphi): \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist offensichtlich linear und stetig, also $L_t^\alpha(\varphi) \in L(\mathbb{C}, \mathbb{C})$.

Wir zeigen nun: $Dx_t^\alpha(\varphi)$ existiert für alle $\varphi \in \mathbb{C}$ und es ist $Dx_t^\alpha(\varphi) = L_t^\alpha(\varphi)$.

Dazu sei $\varphi \in \mathbb{C}$, $\varepsilon > 0$ und

$$K = \{ x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 1 + \|\varphi\| \} \subseteq \mathbb{R}.$$

Da f' auf der kompakten Menge K gleichmäßig stetig ist, gibt es $\delta > 0$ mit

$$|\alpha f'(x) - \alpha f'(y)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x, y \in K \text{ mit } |x - y| < \delta.$$

Sei o.B. $\delta \leq 1$. Für $\zeta \in \mathbb{C}$ mit $\|\zeta\| < \delta$ gilt dann:

Zu jedem $\sigma \in [0,1]$ gibt es ein $\theta(\sigma) \in [0,1]$ mit

$$\alpha f(\varphi(\sigma) + \zeta(\sigma)) - \alpha f(\varphi(\sigma)) = \alpha f'(\varphi(\sigma) + \theta(\sigma) \cdot \zeta(\sigma)) \cdot \zeta(\sigma),$$

und wegen

$$|\varphi(\sigma)| \leq \|\varphi\| \leq \|\varphi\| + 1, \text{ also } \varphi(\sigma) \in K,$$

$$|\varphi(\sigma) + \theta(\sigma) \cdot \zeta(\sigma)| \leq |\varphi(\sigma)| + \theta(\sigma) \cdot |\zeta(\sigma)| \leq \|\varphi\| + 1 \cdot \|\zeta\| \leq \|\varphi\| + \delta < \|\varphi\| + 1,$$

$$\text{also ebenfalls } \varphi(\sigma) + \theta(\sigma) \cdot \zeta(\sigma) \in K,$$

sowie

$$|(\varphi(\sigma) + \theta(\sigma) \cdot \zeta(\sigma)) - \varphi(\sigma)| = |\theta(\sigma) \cdot \zeta(\sigma)| < 1 \cdot \delta$$

folgt nach Definition von δ :

$$\begin{aligned} & |\alpha f(\varphi(\sigma) + \zeta(\sigma)) - \alpha f(\varphi(\sigma)) - \alpha f'(\varphi(\sigma)) \zeta(\sigma)| = \\ & = |\alpha f'(\varphi(\sigma) + \theta(\sigma) \cdot \zeta(\sigma)) \cdot \zeta(\sigma) - \alpha f'(\varphi(\sigma)) \zeta(\sigma)| < \varepsilon \cdot |\zeta(\sigma)| \leq \\ & \leq \varepsilon \cdot \|\zeta\|. \end{aligned}$$

Sei nun $s \in [0,1]$. Dann gilt mit (*):

1. Fall: $0 \leq s+t \leq 1$

$$\begin{aligned} & |x^\alpha(t+s, \varphi+\zeta) - x^\alpha(t+s, \varphi) - L_t^\alpha(\varphi)(\zeta)(s)| = \\ & = |(\varphi+\zeta)(t+s) - \varphi(t+s) - \zeta(t+s)| = 0 \leq \varepsilon \cdot \|\zeta\|. \end{aligned}$$

2. Fall: $1 \leq s+t \leq 2$

$$\begin{aligned} & |x^\alpha(t+s, \varphi+\zeta) - x^\alpha(t+s, \varphi) - L_t^\alpha(\varphi)(\zeta)(s)| = \\ & = |(\varphi+\zeta)(1) + \int_0^{t+s-1} \alpha f(\varphi(\sigma) + \zeta(\sigma)) d\sigma - \varphi(1) - \int_0^{t+s-1} \alpha f(\varphi(\sigma)) d\sigma - \\ & \quad - \zeta(1) - \int_0^{t+s-1} \alpha f'(\varphi(\sigma)) \zeta(\sigma) d\sigma| = \\ & = \left| \int_0^{t+s-1} [\alpha f(\varphi(\sigma) + \zeta(\sigma)) - \alpha f(\varphi(\sigma)) - \alpha f'(\varphi(\sigma)) \zeta(\sigma)] d\sigma \right| = \end{aligned}$$

$$\leq \int_0^{t+s-1} \varepsilon \|\zeta\| d\sigma = \varepsilon \cdot \|\zeta\| \cdot (t+s-1) \leq$$

$$\leq \varepsilon \cdot \|\zeta\|.$$

Es gilt also stets

$$\left| x^\alpha(t+s, \varphi+\zeta) - x^\alpha(t+s, \varphi) - L_t^\alpha(\varphi)(\zeta)(s) \right| \leq \varepsilon \cdot \|\zeta\|$$

- und damit

$$\begin{aligned} \| x_t^\alpha(\varphi+\zeta) - x_t^\alpha(\varphi) - L_t^\alpha(\varphi)(\zeta) \| &= \\ &= \sup_{s \in [0,1]} \left| x^\alpha(t+s, \varphi+\zeta) - x^\alpha(t+s, \varphi) - L_t^\alpha(\varphi)(\zeta)(s) \right| \leq \varepsilon \cdot \|\zeta\| \end{aligned}$$

für alle $\zeta \in C$ mit $\|\zeta\| < \delta$.

Dies ist aber die Behauptung, d.h. wir haben gezeigt, daß x_t^α differenzierbar ist mit $Dx_t^\alpha = L_t^\alpha$. Es bleibt zu zeigen, daß x_t^α stetig differenzierbar ist, d.h. daß $L_t^\alpha: C \rightarrow L(C, C)$ stetig ist.

Dazu sei $\varphi \in C$, $\varepsilon > 0$ und K, δ wie zuvor. Sei weiter $\psi \in C$ mit $\|\psi - \varphi\| < \delta$ und $\zeta \in C$, $s \in [0,1]$. Dann gilt:

1. Fall: $0 \leq t+s \leq 1$

$$\left| [L_t^\alpha(\psi) - L_t^\alpha(\varphi)](\zeta)(s) \right| = \left| \zeta(t+s) - \zeta(t+s) \right| = 0 \leq \varepsilon \cdot \|\zeta\|.$$

2. Fall: $1 \leq t+s \leq 2$

Für $0 \leq \sigma \leq t+s-1$ ist $\sigma \in [0,1]$ und

$$\left| \varphi(\sigma) \right| \leq \|\varphi\| \leq 1 + \|\varphi\|, \text{ also } \varphi(\sigma) \in K,$$

$$\left| \psi(\sigma) \right| \leq \|\psi\| \leq \|\psi - \varphi\| + \|\varphi\| < \delta + \|\varphi\| \leq 1 + \|\varphi\|,$$

also ebenfalls $\psi(\sigma) \in K$.

$$\text{weiter ist } \left| \psi(\sigma) - \varphi(\sigma) \right| \leq \|\psi - \varphi\| < \delta,$$

$$\text{und somit: } \left| \alpha f'(\psi(\sigma)) - \alpha f'(\varphi(\sigma)) \right| < \varepsilon.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \left| [L_t^\alpha(\psi) - L_t^\alpha(\varphi)](\zeta)(s) \right| &= \\ &= \left| \zeta(1) + \int_0^{t+s-1} \alpha f'(\psi) \zeta d\sigma - \zeta(1) - \int_0^{t+s-1} \alpha f'(\varphi) \zeta d\sigma \right| = \\ &= \left| \int_0^{t+s-1} [\alpha f'(\psi) - \alpha f'(\varphi)] \zeta d\sigma \right| \leq \int_0^{t+s-1} \varepsilon \cdot \|\zeta\| d\sigma = \\ &= \varepsilon \cdot \|\zeta\| \cdot (t+s-1) \leq \varepsilon \cdot \|\zeta\|. \end{aligned}$$

Es gilt also stets

$$\left| [L_t^\alpha(\psi) - L_t^\alpha(\varphi)](\zeta)(s) \right| \leq \varepsilon \cdot \|\zeta\|,$$

und somit

$$\| [L_t^\alpha(\psi) - L_t^\alpha(\varphi)](\zeta) \| = \sup_{s \in [0,1]} \left| [L_t^\alpha(\psi) - L_t^\alpha(\varphi)](\zeta)(s) \right| \leq \varepsilon \cdot \|\zeta\|$$

für alle $\zeta \in C$. Dies bedeutet aber

$$\|L_1^\alpha(\psi) - L_1^\alpha(\varphi)\| \leq \varepsilon$$

für alle $\psi \in C$ mit $\|\psi - \varphi\| < \delta$ womit die Stetigkeit von L_1^α gezeigt ist. Insgesamt haben wir bewiesen, daß T_1 für $k \geq 1$ in φ stetig differenzierbar ist. Wir wollen nun allerdings auf den Beweis daß T_1 auch k -mal stetig differenzierbar ist, verzichten.

3. Im Fall $k \geq 2$ bedeutet dies, daß T zweimal stetig partiell nach α und φ differenzierbar ist. Damit sind

$$\frac{\partial T}{\partial \alpha} :]1, \infty[\times \mathbb{R} \times C \ni (t, \alpha, \varphi) \longmapsto DT(t, \cdot, \varphi)(\alpha) \in L(\mathbb{R}, \mathbb{R} \times C)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} :]1, \infty[\times \mathbb{R} \times C \ni (t, \alpha, \varphi) \longmapsto DT(t, \alpha, \cdot)(\varphi) \in L(C, \mathbb{R} \times C)$$

stetig partiell nach α und φ differenzierbar.

Um zu zeigen, daß $\frac{\partial T}{\partial \alpha}$ und $\frac{\partial T}{\partial \varphi}$ (auf $]1, \infty[\times \mathbb{R} \times C$) stetig differenzierbar sind, müssen wir nur noch zeigen, daß die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial \alpha}$ und $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial T}{\partial \varphi}$ existieren und stetig sind. Wir tun dies, indem wir beweisen, daß $\frac{\partial T}{\partial t}$ auf $]1, \infty[\times \mathbb{R} \times C$ stetig partiell nach α und φ differenzierbar ist, d.h. daß $\frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{\partial T}{\partial t}$ und $\frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{\partial T}{\partial t}$ existieren und stetig sind. Dabei genügt es wieder, nur $(t, \alpha, \varphi) \longmapsto T^\alpha(t, \varphi) = x_1^\alpha(\varphi)$ zu betrachten. Für $t > 1, \sigma \in [0, 1]$ gilt aber:
$$\left[\frac{\partial}{\partial t} T^\alpha(t, \varphi) \right](\sigma) = \dot{x}_1^\alpha(\varphi)(\sigma) = \dot{x}^\alpha(t + \sigma, \varphi) = \alpha f(x^\alpha(t - 1 + \sigma, \varphi)) = \alpha f(x_{t-1}^\alpha(\varphi)(\sigma)) = \alpha f(T^\alpha(t-1, \varphi)(\sigma)),$$

oder (etwas unexakt):

$$\frac{\partial}{\partial t} T^\alpha(t, \varphi) = \alpha f(T^\alpha(t-1, \varphi)).$$

Die rechte Seite ist nun aber wegen 2. und $k \geq 2$ sogar zweimal stetig partiell nach α und φ differenzierbar. ■

Aus dem Beweis ergibt sich noch

Corollar 2.1

Sei $f \in C(\mathbb{R})$. Dann ist für alle $t \geq 0, \alpha \in \mathbb{R}$ die Abbildung

$x_1^\alpha : C \ni \varphi \mapsto x_1^\alpha(\varphi) \in C$ stetig differenzierbar und für $t \in [0, 1], \varphi \in C, \zeta \in C$ gilt:

$$[Dx_1^\alpha(\varphi)](\zeta)(s) = \begin{cases} \zeta(t+s) & \text{für } 0 \leq t+s \leq 1 \\ \zeta(1) + \int_0^{t+s-1} \alpha f'(\varphi(\sigma)) \zeta(\sigma) d\sigma & \text{für } 1 \leq t+s \leq 2 \end{cases} \quad \blacksquare$$

Wir werden später die Ableitung von x_1^α auch noch für $t \geq 1$ benötigen.

Daher folgende

Definition 2.1

Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C$, $\xi \in C$. Dann bezeichne $U^\alpha(., \varphi, \xi): \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ die (eindeutige) Lösung des linearen verzögerten Anfangswertproblems

$$(*) \quad \dot{u}(t) = \alpha f'(x^\alpha(t-1, \varphi)) u(t-1), \quad t \geq 1, \quad u|_{[0,1]} = \xi.$$

Weiter sei für $t \geq 0$:

$$U_t^\alpha(\varphi, \xi) = U^\alpha(t+., \varphi, \xi)|_{[0,1]} \in C$$

$$U_t^\alpha(\varphi) = U_t^\alpha(\varphi, .): C \rightarrow C.$$

Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung $U_t^\alpha(., \varphi, \xi)$ folgt wie in Lemma 1.1 durch schrittweises Integrieren, wir wollen daher auf den Beweis verzichten. Die Gleichung (*) heißt Variationsgleichung zu $(\alpha f, \varphi)$. Sie entsteht durch formale Differentiation von

$$\dot{x}^\alpha(t, \varphi) = \alpha f(x^\alpha(t-1, \varphi)), \quad t \geq 1, \quad x^\alpha(., \varphi)|_{[0,1]} = \varphi$$

nach φ (in Richtung ξ).

Wir werden daher den Zusammenhang $Dx_t^\alpha(\varphi) = U_t^\alpha(\varphi)$ erwarten.

Dazu zeigen wir zunächst:

Lemma 2.2

Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C$ und $t, s \in \mathbb{R}_0^+$. Dann gilt:

$$U_{t+s}^\alpha(\varphi) = U_t^\alpha(x_s^\alpha(\varphi)) \circ U_s^\alpha(\varphi).$$

Beweis:

Sei $\xi \in C$ und $\zeta = U_s^\alpha(\varphi, \xi) \in C$. Wir wollen zeigen:

$$U_{t+s}^\alpha(\varphi, \xi) = U_t^\alpha(x_s^\alpha(\varphi), \zeta).$$

Dazu sei:

$$\eta = U^\alpha(., x_s^\alpha(\varphi), \zeta): \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\bar{\eta} = U^\alpha(., t+s, \varphi, \xi)|_{\mathbb{R}_0^+}: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R},$$

also:

$$\dot{\eta}(t) = \alpha f'(x^\alpha(t-1, x_s^\alpha(\varphi))) \eta(t-1), \quad t \geq 1, \quad \eta|_{[0,1]} = \zeta.$$

Für $\bar{\eta}$ gilt:

$$\bar{\eta}|_{[0,1]} = U^\alpha(s+., \varphi, \xi)|_{[0,1]} = U_s^\alpha(\varphi, \xi) = \zeta,$$

und für $t \geq 1$:

$$\dot{\bar{\eta}}(t) = \dot{U}^\alpha(t+s, \varphi, \xi) = \alpha f'(x^\alpha(t+s-1, \varphi)) U^\alpha(t+s-1, \varphi, \xi) = \alpha f'(x^\alpha(t+s-1, \varphi)) \bar{\eta}(t-1).$$

Dabei ist $t+s-1 \geq s \geq 0$ und:

$$x^\alpha(t+s-1, \varphi) = x_{t-1+s}^\alpha(\varphi)(0) = x_{t-1}^\alpha(x_s(\varphi))(0) = x^\alpha(t-1+0, x_s(\varphi)),$$

d.h. es gilt ebenfalls:

$$\dot{\bar{\eta}}(t) = \alpha f'(x^\alpha(t-1, x_s^\alpha(\varphi))) \bar{\eta}(t-1), \quad t \geq 1, \quad \bar{\eta}|_{[0,1]} = \zeta.$$

Wegen der Eindeutigkeit ist also $\eta = \bar{\eta}$ bzw.

$$U^{\alpha}(t, x_s^{\alpha}(\varphi), \zeta) = U^{\alpha}(t+s, \varphi, \zeta) \text{ für alle } t \geq 0.$$

Für $t \geq 0, \sigma \in [0, 1]$ folgt somit :

$$U_{t+s}^{\alpha}(\varphi, \zeta)(\sigma) = U^{\alpha}(t+s+\sigma, \varphi, \zeta) = U^{\alpha}(t+\sigma, x_s^{\alpha}(\varphi), \zeta) = U_t^{\alpha}(x_s^{\alpha}(\varphi), \zeta)(\sigma),$$

und dies ist die Behauptung. ■

Damit erhalten wir :

Lemma 2.3

Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi \in C$ und $t \in \mathbb{R}_0^+$. Dann gilt

$$Dx_t^{\alpha}(\varphi) = U_t^{\alpha}(\varphi) \in L(C, C).$$

Beweis :

Wir zeigen durch Induktion :

Für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $\varphi \in C$ und $t \in [k, k+1]$ ist $Dx_t^{\alpha}(\varphi) = U_t^{\alpha}(\varphi)$.

Sei $k=0$ und $t \in [0, 1]$. Für $\varphi \in C, \zeta \in C$ und $s \in [0, 1]$ gilt dann nach Definition von $U^{\alpha}(\cdot, \varphi, \zeta)$:

$$U^{\alpha}(t+s, \varphi, \zeta) = \zeta(t+s) \text{ falls } 0 \leq t+s \leq 1,$$

$$U^{\alpha}(t+s, \varphi, \zeta) = U^{\alpha}(1, \varphi, \zeta) + \int_1^{t+s} \dot{U}^{\alpha}(\sigma, \varphi, \zeta) d\sigma =$$

$$= \zeta(1) + \int_1^{t+s} \alpha f'(\varphi(\sigma-1)) \zeta(\sigma-1) d\sigma =$$

$$= \zeta(1) + \int_0^{t+s-1} \alpha f'(\varphi(\sigma)) \zeta(\sigma) d\sigma.$$

falls $1 \leq t+s \leq 2$.

Mit dem Corollar 2.1 gilt also

$$U_t^{\alpha}(\varphi)(\zeta)(s) = U^{\alpha}(t+s, \varphi, \zeta) = Dx_t^{\alpha}(\varphi)(\zeta)(s)$$

für alle $s \in [0, 1], \zeta \in C$, d.h. es ist $U_t^{\alpha}(\varphi) = Dx_t^{\alpha}(\varphi)$ für alle $\varphi \in C$.

Sei nun die Behauptung richtig für $k \in \mathbb{N}_0$.

Für $t \in [k+1, k+2], \varphi \in C$ ist dann $t-1 \in [k, k+1]$, also $Dx_{t-1}^{\alpha}(\varphi) = U_{t-1}^{\alpha}(\varphi)$.

Mit der Halbflußeigenschaft von $x_t^{\alpha}(\varphi)$ bzw. $U_t^{\alpha}(\varphi)$ und $Dx_t^{\alpha}(\varphi) = U_t^{\alpha}(\varphi)$ für alle $\varphi \in C$ folgt somit :

$$Dx_t^{\alpha}(\varphi) = Dx_{1+t-1}^{\alpha}(\varphi) = D(x_1^{\alpha} \circ x_{t-1}^{\alpha})(\varphi) = Dx_1^{\alpha}(x_{t-1}^{\alpha}(\varphi)) \circ Dx_{t-1}^{\alpha}(\varphi) =$$

$$= U_1^{\alpha}(x_{t-1}^{\alpha}(\varphi)) \circ U_{t-1}^{\alpha}(\varphi) = U_{1+t-1}^{\alpha}(\varphi) = U_t^{\alpha}(\varphi).$$

Dies ist die Induktionsbehauptung für $k+1$. ■

3. Die Poincaréabbildung für periodische Lösungen

Wir werden nun durch Einführung einer geeigneten Poincaréabbildung die Suche nach periodischen Lösungen von

$$\dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1)) \quad (\alpha f)$$

in ein Fixpunktproblem überführen.

Wir wollen periodische Lösungen x betrachten, die um den Nullpunkt schwingen. Durch Verschieben auf der t -Achse dürfen wir dabei o.B. $x(0) = 0$ annehmen, so daß das Anfangsstück $x|_{[0,1]} = x_0$ in dem abgeschlossenen Unterraum

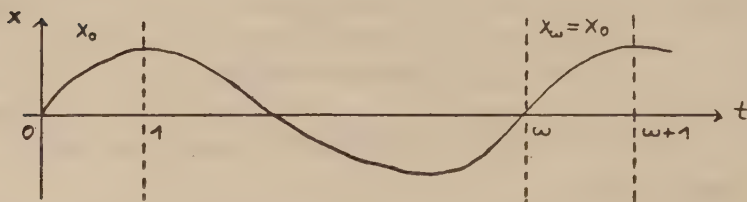
$$C_0 = \{ \varphi \in C \mid \varphi(0) = 0 \} \subseteq C$$

mit Kodimension 1 von C liegt.

Hat nun x die Periode $\omega > 0$, so gilt :

$$x(\omega) = x(0) = 0, \quad x(t+\omega) = x(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R},$$

$$x_\omega = x(\omega + \cdot)|_{[0,1]} = x|_{[0,1]} = x_0.$$

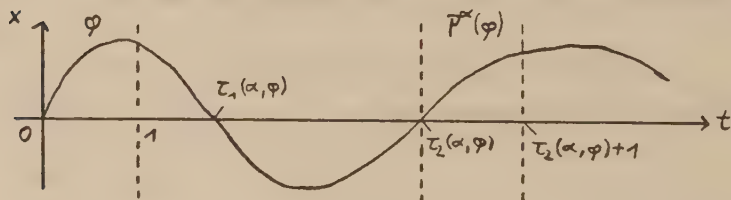


Diese Überlegung führt zu folgender Vorgehensweise für die Definition einer Poincaréabbildung :

Wähle eine geeignete Teilmenge $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times C_0$, so daß für alle $(\alpha, \varphi) \in \Omega$ die Lösung $x^\alpha(\cdot, \varphi) : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ von

$$(*) \quad \dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1)), \quad t \geq 1, \quad x|_{[0,1]} = \varphi$$

zwei aufeinanderfolgende Nullstellen $\tau_1(\alpha, \varphi), \tau_2(\alpha, \varphi)$ besitzt.



Dann sei $P^\alpha(\varphi) = x^\alpha(\tau_2(\alpha, \varphi) + \cdot, \varphi) \mid [0, 1] \in C_0$.

Gilt nun $P^\alpha(\varphi) = \varphi$ für ein $\varphi \in C_0$, so ist $x^\alpha(\cdot, \varphi)$ periodische Lösung von (*) mit Periode $\tau_2(\alpha, \varphi)$.

Dies soll nun präzisiert werden, wobei wir Ω natürlich so wählen werden, daß es offen ist und die Abbildungen P, τ_1, τ_2 stetig und stetig differenzierbar sind.

Lemma 3.1

Sei $f \in C(\mathbb{R})$, $C_0 = \{ \varphi \in C \mid \varphi(0) = 0 \}$,

$\Lambda = \{ (\alpha, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C_0 \mid \text{es gibt } t > 1 \text{ mit } x^\alpha(t, \varphi) = 0, \dot{x}^\alpha(t, \varphi) \neq 0 \text{ und } x^\alpha(s, \varphi) \neq 0 \text{ für } s \in [1, 1+t] \setminus \{t\} \}$.

Dann gilt :

1. für alle $(\alpha, \varphi) \in \Lambda$ existiert

$$\tau(\alpha, \varphi) = \inf \{ t \geq 1 \mid x^\alpha(t, \varphi) = 0 \}$$

und es gilt :

$$\tau(\alpha, \varphi) > 1, \quad x^\alpha(\tau(\alpha, \varphi), \varphi) = 0, \quad \dot{x}^\alpha(\tau(\alpha, \varphi), \varphi) \neq 0$$

$$x^\alpha(t, \varphi) \neq 0 \quad \text{für } 1 \leq t < \tau(\alpha, \varphi) \quad \text{und} \quad \tau(\alpha, \varphi) < t \leq \tau(\alpha, \varphi) + 1.$$

2. $\Lambda \subseteq \mathbb{R}^+ \times C_0$ ist offen und die nach 1. definierte Abbildung $\tau : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig und stetig differenzierbar.

Beweis :

1. Sei $(\alpha, \varphi) \in \Lambda$ und $N = \{ t \geq 1 \mid x^\alpha(t, \varphi) = 0 \}$.

Nach Definition von Λ gibt es $t^* > 1$ mit

$$x^\alpha(t^*, \varphi) = 0, \quad \dot{x}^\alpha(t^*, \varphi) \neq 0, \quad x^\alpha(t, \varphi) \neq 0 \quad \text{für } 1 \leq t < t^* \quad \text{und} \quad t^* < t \leq t^* + 1.$$

Dann ist $t^* \in N$, also $N \neq \emptyset$, und da N durch 1 nach unten beschränkt ist, existiert $\tau(\alpha, \varphi) = \inf N$ und es ist $1 \leq \tau(\alpha, \varphi) \leq t^*$.

Damit muß nur noch $\tau(\alpha, \varphi) = t^*$ gezeigt werden.

Annahme : $\tau(\alpha, \varphi) < t^*$.

Dann ist $\varepsilon = \frac{1}{2} (t^* - \tau(\alpha, \varphi)) > 0$ und nach Definition des Infimum gibt es $t \in N$ mit $\tau(\alpha, \varphi) < t < \tau(\alpha, \varphi) + \varepsilon = \frac{1}{2} (t^* + \tau(\alpha, \varphi)) < t^*$; $t \in N$ bedeutet $t \geq 1$ und $x^\alpha(t, \varphi) = 0$. Nach Definition von t^* ist aber $x^\alpha(t, \varphi) \neq 0$ wegen $1 \leq t < t^*$. Also ist $\tau(\alpha, \varphi) \geq t^*$ und somit $\tau(\alpha, \varphi) = t^*$.

2. Es genügt zu zeigen :

Zu jedem $(\alpha, \varphi) \in \Lambda$ gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^+ \times C_0$ und stetig differenzierbares $\tau^* : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit :

$$\tau^*(\beta, \psi) > 1, \quad x^\alpha(\tau^*(\beta, \psi), \psi) = 0, \quad \dot{x}^\alpha(\tau^*(\beta, \psi), \psi) \neq 0$$

$x^\beta(t, \psi) \neq 0$ für $1 \leq t < \tau^*(\beta, \psi)$ und $\tau^*(\beta, \psi) < t \leq \tau^*(\beta, \psi) + 1$

für alle $(\beta, \psi) \in U$.

Dann ist nämlich $U \subseteq A$ und $\tau^* = \tau|_U$, woraus alles folgt.

Sei also $(\alpha, \varphi) \in A$, $t^* = \tau(\alpha, \varphi) > 1$, d.h.

$x^\alpha(t^*, \varphi) = 0$, $\dot{x}^\alpha(t^*, \varphi) \neq 0$, $x^\alpha(t, \varphi) \neq 0$ für $1 \leq t < t^*$ und $t^* < t \leq t^* + 1$.

Wegen $Dx^\alpha(\cdot, \varphi)(t^*) = \dot{x}^\alpha(t^*, \varphi) \neq 0$ gibt es mit Lemma 2.1 und dem Satz über implizite Funktionen offene Umgebungen $U \subseteq \mathbb{R}^* \times C_0$ von (α, φ) und $I \subseteq \mathbb{R}^*$ von t^* , sowie ein stetig differenzierbares $\tau^*: U \rightarrow I$ mit

$$\tau^*(\alpha, \varphi) = t^*, \quad K = \{ ((\beta, \psi), t) \in U \times I \mid x^\beta(t, \psi) = 0 \} = \text{graph } \tau^*.$$

Wegen $\tau^*(\alpha, \varphi) = t^* > 1$ und $t^* \in I$ erreichen wir durch Verkleinern von U und I , daß $\tau^*(\beta, \psi) > 1$ für alle $(\beta, \psi) \in U$ gilt. Dann ist die Abbildung

$$U \ni (\beta, \psi) \mapsto \dot{x}^\beta(\tau^*(\beta, \psi), \psi) \in \mathbb{R}$$

definiert und stetig; wegen $\dot{x}^\alpha(t^*, \varphi) \neq 0$ darf also weiter o.B.

$\dot{x}^\beta(\tau^*(\beta, \psi), \psi) \neq 0$ für alle $(\beta, \psi) \in U$ angenommen werden.

Damit ist nur noch $x^\beta(t, \psi) \neq 0$ für alle $t \in [1, 1 + \tau^*(\beta, \psi)] \setminus \{\tau^*(\beta, \psi)\}$, $(\beta, \psi) \in U$ zu zeigen. Dies ist ggf. durch weiteres Verkleinern von U richtig, andernfalls gibt es eine gegen (α, φ) konvergierende Folge $((\alpha_k, \varphi_k))_{k \in \mathbb{N}}$ aus U und zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $t_k \in \mathbb{R}$ mit

$$t_k \in [1, 1 + \tau^*(\alpha_k, \varphi_k)] \setminus \{\tau^*(\alpha_k, \varphi_k)\}, \quad x^{\alpha_k}(t_k, \varphi_k) = 0.$$

Da $(\tau^*(\alpha_k, \varphi_k))_{k \in \mathbb{N}}$ gegen $\tau^*(\alpha, \varphi) = t^*$ konvergiert, ist $(\tau^*(\alpha_k, \varphi_k))_{k \in \mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, also ist $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ beschränkt und besitzt somit einen Häufungspunkt $\bar{t} \in \mathbb{R}$. Wegen $1 \leq t_k \leq \tau^*(\alpha_k, \varphi_k) + 1$ folgt $1 \leq \bar{t} \leq t^* + 1 = \tau^*(\alpha, \varphi) + 1$ und $(\alpha, \varphi, \bar{t})$ ist Häufungspunkt von $((\alpha_k, \varphi_k, t_k))_{k \in \mathbb{N}}$. Aus der Stetigkeit des Lösungsoperators folgt damit, daß $x^\alpha(\bar{t}, \varphi)$ Häufungspunkt von $(x^{\alpha_k}(t_k, \varphi_k))_{k \in \mathbb{N}}$ ist. Wegen $x^{\alpha_k}(t_k, \varphi_k) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ ist somit $x^\alpha(\bar{t}, \varphi) = 0$. Nach Definition von τ^* muß also $\bar{t} \geq t^*$ bzw. $\bar{t} = t^*$ sein. Damit ist $((\alpha, \varphi), t^*)$ Häufungspunkt von $((\alpha_k, \varphi_k), t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und da $U \times I$ offene Umgebung von $((\alpha, \varphi), t^*)$ ist, gibt es $k \in \mathbb{N}$ mit $((\alpha_k, \varphi_k), t_k) \in U \times I$. Wegen $x^{\alpha_k}(t_k, \varphi_k) = 0$ folgt $((\alpha_k, \varphi_k), t_k) \in K = \text{graph } \tau^*$, also $t_k = \tau^*(\alpha_k, \varphi_k)$ in Widerspruch zu $t_k \neq \tau^*(\alpha_k, \varphi_k)$.

Damit definieren wir :

Definition 3.1

Sei $f \in C(\mathbb{R})$ und $C_0 = \{ \varphi \in C \mid \varphi(0) = 0 \}$.

1. Sei $\Lambda = \{ (\alpha, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C_0 \mid \text{es gibt } t > 1 \text{ mit } x^\alpha(t, \varphi) = 0, \dot{x}^\alpha(t, \varphi) \neq 0 \text{ und } x^\alpha(s, \varphi) \neq 0 \text{ für } s \in [1, 1+t] \setminus \{t\} \}$,
 $\tau = \{ \Lambda \ni (\alpha, \varphi) \mapsto \inf \{ t \geq 1 \mid x^\alpha(t, \varphi) = 0 \} \in \mathbb{R} \}$,

Dann heißt die Abbildung

$$Q = \{ \Lambda \ni (\alpha, \varphi) \mapsto x_{\tau(\alpha, \varphi)}^\alpha(\varphi) \in C_0 \}$$

halbe Poincaréabbildung (von f).

Die Abbildung

$$P = \{ \Omega \ni (\alpha, \varphi) \mapsto Q(\alpha, Q(\alpha, \varphi)) \in C_0 \}$$

mit $\Omega = \{ (\alpha, \varphi) \in \Lambda \mid (\alpha, Q(\alpha, \varphi)) \in \Lambda \}$

heißt Poincaréabbildung (von f).

2. Für $\alpha > 0$ sei

$$\Lambda^\alpha = \{ \varphi \in C_0 \mid (\alpha, \varphi) \in \Lambda \} \subseteq C_0$$

$$\Omega^\alpha = \{ \varphi \in C_0 \mid (\alpha, \varphi) \in \Omega \} \subseteq C_0$$

$$\tau^\alpha = \{ \Lambda^\alpha \ni \varphi \mapsto \tau(\alpha, \varphi) \in \mathbb{R} \}$$

$$Q^\alpha = \{ \Lambda^\alpha \ni \varphi \mapsto Q(\alpha, \varphi) \in C_0 \}$$

$$P^\alpha = \{ \Omega^\alpha \ni \varphi \mapsto P(\alpha, \varphi) \in C_0 \}.$$

Bemerkungen :

1. Mit dem Halbfluß $T^\alpha: \mathbb{R}_0^+ \times C \rightarrow C$ gilt :

$$Q(\alpha, \varphi) = Q^\alpha(\varphi) = T^\alpha(\tau^\alpha(\varphi), \varphi) \text{ für } (\alpha, \varphi) \in \Lambda.$$

2. Es ist $\Omega^\alpha = \Lambda^\alpha \cap (Q^\alpha)^{-1}(\Lambda^\alpha)$, $P^\alpha(\varphi) = Q^\alpha(Q^\alpha(\varphi))$ für $\varphi \in \Omega^\alpha$, $\alpha > 0$.

Wir haben im vorherigen Lemma nur gezeigt, daß Λ offen und τ stetig und stetig differenzierbar ist. Daher ergänzen wir :

Lemma 3.2

Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$. Dann sind Λ und Ω offen in $\mathbb{R}^+ \times C_0$, und τ, Q, P sind stetig und stetig differenzierbar.

Beweis :

Sei $R: \Lambda \rightarrow \mathbb{R} \times C_0$ definiert durch $R(\alpha, \varphi) = (T(\tau(\alpha, \varphi), \alpha, \varphi))$.

Da τ auf Λ und T auf $]1, \infty[\times \mathbb{R} \times C$ stetig differenzierbar ist, gilt dies wegen $\tau(\Lambda) \subseteq]1, \infty[$ auch für R .

Mit $R(\alpha, \varphi) = (T(\tau(\alpha, \varphi), \alpha, \varphi)) = (\alpha, x_{\tau(\alpha, \varphi)}^\alpha(\varphi)) = (\alpha, Q(\alpha, \varphi))$ für alle $(\alpha, \varphi) \in \Lambda$ folgt, daß Q stetig differenzierbar und $\Omega = R^{-1}(\Lambda) \subseteq \Lambda$ offen ist in $\mathbb{R} \times C_0$.

Wegen $P(\alpha, \varphi) = Q(\alpha, Q(\alpha, \varphi))$ folgt auch die Behauptung für P . ■

Natürlich sind auch $\Lambda^\alpha, \Omega^\alpha$ offen (in C_0), und $\tau^\alpha, Q^\alpha, P^\alpha$ sind stetig und stetig differenzierbar. Wir werden später in Lemma 5.1 sehen, daß $\Lambda^\alpha, \Omega^\alpha$ für die von uns betrachteten Funktionen f nicht leer sind.

Im folgenden Lemma zeigen wir, daß die Gleichung $P^\alpha(\varphi) = \varphi$ eine periodische Lösung von (af) liefert. Zusätzlich zeigen wir, daß die Gleichung $Q^\alpha(\varphi) = -\varphi$ für ungerade f ebenfalls eine periodische Lösung $x = x^\alpha(\cdot, \varphi)$ erzeugt, die außerdem noch folgende Symmetrieeigenschaft besitzt ($\tau = \tau^\alpha(\varphi)$):

$$x(t + \tau) = -x(t), \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Wir definieren zunächst

Definition 3.2

Sei $f \in C(\mathbb{R})$ und $\alpha > 0$. Eine stetige Abbildung $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **symmetrische periodische Lösung** von (af), wenn gilt:

1. x ist periodische Lösung von (af) mit $x(0) = 0$,
2. es gibt $\tau > 0$ mit

$$(i) \quad x(\cdot + \tau) = -x,$$

$$(ii) \quad x(t) \neq 0 \text{ für } 0 < t < \tau.$$

Folgerung: x hat Periode 2τ und es ist $\varphi = x|_{[0,1]} \in \Lambda^\alpha$ mit $Q^\alpha(\varphi) = -\varphi$.

Lemma 3.3

1. Sei $f \in C(\mathbb{R}), \alpha > 0$ und $\varphi \in \Omega^\alpha$.

Ist $P^\alpha(\varphi) = \varphi$, so ist $x^\alpha(\cdot, \varphi)$ (genauer: die periodische Fortsetzung von $x^\alpha(\cdot, \varphi)$ auf $\mathbb{R}$) eine periodische Lösung von (af) mit Periode $\omega = \tau^\alpha(\varphi) + \tau^\alpha(Q^\alpha(\varphi))$.

2. Sei $f \in C(\mathbb{R})$ ungerade, $\alpha > 0$ und $\varphi \in \Lambda^\alpha$.

Ist $Q^\alpha(\varphi) = -\varphi$, so ist $x^\alpha(\cdot, \varphi)$ symmetrische periodische Lösung von (af) mit Periode $\omega = 2\tau^\alpha(\varphi)$.

Beweis:

1. Sei $\omega = \tau^\alpha(\varphi) + \tau^\alpha(Q^\alpha(\varphi))$; dann ist mit $\tau_1 = \tau^\alpha(\varphi), \tau_2 = \tau^\alpha(Q^\alpha(\varphi))$:

$$\begin{aligned} \varphi &= P^\alpha(\varphi) = Q^\alpha(Q^\alpha(\varphi)) = Q^\alpha(x_{\tau_1}^\alpha(\varphi)) = x_{\tau_1}^\alpha(\tau^\alpha(x_{\tau_1}^\alpha(\varphi)) + \dots, x_{\tau_1}^\alpha(\varphi))|_{[0,1]} = \\ &= x_{\tau_2}^\alpha(x_{\tau_1}^\alpha(\varphi)) = x_{\tau_1 + \tau_2}^\alpha(\varphi) = x_\omega^\alpha(\varphi). \end{aligned}$$

Da $x = x^\alpha(\cdot, \varphi)$ Lösung von (af) ist, ist auch $y = x(\cdot + \omega)$ Lösung von (af) mit Anfangswert

$$y|_{[0,1]} = x(\cdot + \omega)|_{[0,1]} = x_\omega^\alpha(\varphi) = \varphi = x|_{[0,1]},$$

und wegen der Eindeutigkeit von Lösungen gilt: $x = y = x(\cdot + \omega)$, x ist also periodisch mit Periode ω .

2. Sei $f \in C(\mathbb{R})$ ungerade, $\alpha > 0$, $\varphi \in \Lambda^\alpha$.

Behauptung : es ist $x^\alpha(., -\varphi) = -x^\alpha(., \varphi)$.

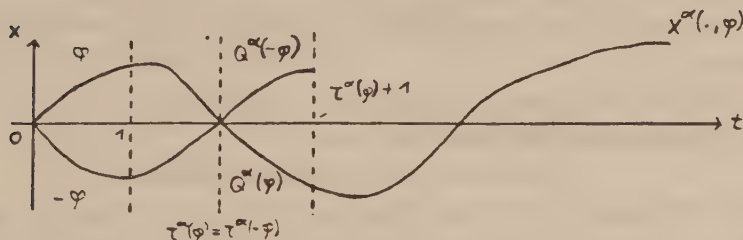
Beweis : sei $y = -x^\alpha(., \varphi) : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt für $t > 1$:

$$\dot{y}(t) = -\dot{x}^\alpha(t, \varphi) = -\alpha f(x^\alpha(t-1, \varphi)) = \alpha f(-x^\alpha(t-1, \varphi)) = \alpha f(y(t-1)),$$

d.h. y ist Lösung von (αf) mit Anfangswert $y|_{[0,1]} = -x^\alpha(., \varphi)|_{[0,1]} = -\varphi$.

Wegen $\varphi \in \Lambda^\alpha$ erhält man hieraus sofort $-\varphi \in \Lambda^\alpha$ und $\tau^\alpha(-\varphi) = \tau^\alpha(\varphi)$ sowie

$$Q^\alpha(-\varphi) = x^\alpha(\tau^\alpha(-\varphi) + ., -\varphi)|_{[0,1]} = -x^\alpha(\tau^\alpha(\varphi) + ., \varphi)|_{[0,1]} = -Q^\alpha(\varphi).$$



Sei nun $Q^\alpha(\varphi) = -\varphi$. Dann gilt mit $\tau = \tau^\alpha(\varphi)$:

$$x_\tau^\alpha(\varphi) = x^\alpha(\tau^\alpha(\varphi) + ., \varphi)|_{[0,1]} = Q^\alpha(\varphi) = -\varphi.$$

Ist $x = x^\alpha(., \varphi)$, $y = -x^\alpha(., \tau + .) = x^\alpha(., \tau + \varphi)$, so sind x und y Lösungen von (αf) und wegen

$$y|_{[0,1]} = -x(., \tau + \varphi)|_{[0,1]} = -x_\tau(\varphi) = \varphi$$

folgt $x = y$, also $x^\alpha(t, \varphi) = -x^\alpha(t + \tau, \varphi)$ für alle $t \geq 0$.

$x^\alpha(., \varphi)$ besitzt also die Symmetrieeigenschaft, aus der auch die Periodizität mit Periode $2\tau = 2\tau(\alpha, \varphi)$ folgt. Weiter ist wegen $(\alpha, \varphi) \in \Lambda^\alpha$ $x^\alpha(t, \varphi) \neq 0$ für $1 \leq t < \tau$ und $\tau < t \leq \tau + 1$, also auch für $0 < t < \tau$ wegen $x^\alpha(t, \varphi) = -x^\alpha(t + \tau, \varphi)$. ■

Bemerkung :

Ist $Q^\alpha(\varphi) = -\varphi$, $\tau = \tau(\alpha, \varphi)$, so ist $\tau > 1$ und $\varphi(t) = -x^\alpha(t + \tau, \varphi)$ für

$t \in [0, 1]$. Also ist φ differenzierbar mit $\dot{\varphi} = -\dot{x}^\alpha(\tau + ., \varphi)|_{[0,1]} \in C$.

Als Letztes wollen wir für den Fall $Q^\alpha(\varphi) = -\varphi$ noch die Ableitung $DQ^\alpha(\varphi)$ durch die Ableitung $DT^\alpha(\tau(\alpha, \varphi), .)(\varphi) = D(x_{\tau(\alpha, \varphi)}^\alpha)(\varphi)$ des Halbflusses T^α ausdrücken. $DQ^\alpha(\varphi)$ ergibt sich dabei aus $Dx_{\tau(\alpha, \varphi)}^\alpha(\varphi)$ mit Hilfe der Projektion von $C = C_0 \oplus \mathbb{R}\dot{\varphi}$ auf C_0 . Wir definieren zunächst :

Definition 3.3

Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$, $(\alpha, \varphi) \in \Lambda$ mit $Q^\alpha(\varphi) = -\varphi$.

Dann sei $W_\varphi^\alpha = Dx_{\tau(\alpha, \varphi)}^\alpha(\varphi) \in L(C, C)$ und $U_\varphi^\alpha = DQ^\alpha(\varphi) \in L(C_0, C_0)$.

Lemma 3.4

Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$, $(\alpha, \varphi) \in A$, $Q^\alpha(\varphi) = -\varphi$ und $\dot{\varphi}(0) \neq 0$.

1. Für $\xi \in C_0$ gilt:

$$U_\varphi^\alpha \xi = W_\varphi^\alpha \xi - \dot{\varphi} x, \quad x = \frac{W_\varphi^\alpha \xi(0)}{\dot{\varphi}(0)} \in \mathbb{R}$$

2. -1 ist Eigenwert von W_φ^α mit Eigenfunktion $\dot{\varphi}$.

3. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\xi \in C$, $\xi \in \mathbb{R} \dot{\varphi}$ und $W_\varphi^\alpha \xi = \lambda \xi$.

Dann ist $\eta = \xi - \dot{\varphi} \frac{\xi(0)}{\dot{\varphi}(0)} \in C_0$ Eigenfunktion von U_φ^α mit Eigenwert λ .

4. Sei $\eta \in C_0$ Eigenfunktion von U_φ^α mit Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

Dann ist $\xi = \eta + \frac{1}{1+\lambda} \dot{\varphi} \cdot \frac{W_\varphi^\alpha \eta(0)}{\dot{\varphi}(0)} \in C$ Eigenfunktion von W_φ^α mit Eigenwert λ .

Beweis:

1. Für $t \geq 0$, $\psi \in A^\alpha$ gilt: $x^\alpha(\tau^\alpha(\psi), \psi) = 0$, $\tau^\alpha(\psi) > 1$,

und Differentiation nach ψ ergibt bei $\psi = \varphi$:

$$\dot{x}^\alpha(\tau^\alpha(\varphi), \varphi) \cdot D\tau^\alpha(\varphi) + Dx^\alpha(\tau^\alpha(\varphi), \cdot)(\varphi) = 0.$$

Sei $\tau = \tau^\alpha(\varphi)$, also $x^\alpha(t+\tau, \varphi) = -x^\alpha(t, \varphi)$ bzw. $\dot{x}^\alpha(t+\tau, \varphi) = -\dot{x}^\alpha(t, \varphi)$ für $t \in \mathbb{R}_0^+$.

Für $t=0$ folgt: $\dot{x}^\alpha(\tau, \varphi) = -\dot{x}^\alpha(0, \varphi) = -\dot{\varphi}(0)$, also $\dot{\varphi}(0) D\tau^\alpha(\varphi) = Dx^\alpha(\tau, \cdot)(\varphi)$.

Sei $\Gamma = \{C \ni \psi \mapsto \psi(0) \in \mathbb{R}\}$; Γ ist linear und stetig, und es gilt:

$\Gamma \circ x_\tau^\alpha = x^\alpha(\tau, \cdot)$. Für $\xi \in C_0$ gilt somit wegen $\dot{\varphi}(0) \neq 0$:

$$D\tau^\alpha(\varphi)(\xi) = \frac{1}{\dot{\varphi}(0)} D(\Gamma \circ x_\tau^\alpha)(\varphi) \xi = \frac{1}{\dot{\varphi}(0)} \Gamma \circ D(x_\tau^\alpha)(\varphi) \xi = \frac{1}{\dot{\varphi}(0)} \Gamma \circ W_\varphi^\alpha \xi = \frac{1}{\dot{\varphi}(0)} W_\varphi^\alpha \xi(0).$$

Aus $Q^\alpha(\varphi) = x_{\tau(\alpha, \varphi)}^\alpha(\varphi) = T^\alpha(\tau^\alpha(\varphi), \varphi)$ folgt durch Differentiation nach ψ :

$$DQ^\alpha(\varphi) = \dot{x}_{\tau(\alpha, \varphi)}^\alpha(\varphi) \cdot D\tau^\alpha(\varphi) + Dx_{\tau(\alpha, \varphi)}^\alpha(\varphi),$$

und für $\psi = \varphi$, $\xi \in C_0$ erhalten wir mit $\dot{x}_\tau^\alpha(\varphi) = [Q^\alpha(\varphi)]' = -\dot{\varphi}$:

$$U_\varphi^\alpha \xi = DQ^\alpha(\varphi) \xi = \dot{x}_\tau^\alpha(\varphi) [D\tau^\alpha(\varphi) \xi] + Dx_\tau^\alpha(\varphi) \xi = -\dot{\varphi} \frac{1}{\dot{\varphi}(0)} W_\varphi^\alpha \xi(0) + W_\varphi^\alpha \xi.$$

2. Sei $x = x^\alpha(\cdot, \varphi) : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Wegen $Q^\alpha(\varphi) = -\varphi$ ist $x^\alpha(\cdot, \varphi)$ periodisch, und wir können x periodisch auf ganz $\mathbb{R}$ fortsetzen, so daß mit $\tau = \tau^\alpha(\varphi)$ gilt:

$$\dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1)) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}, \quad x|_{\mathbb{R}_0^+} = x^\alpha(\cdot, \varphi), \quad x|_{[0,1]} = \varphi,$$

$$x(t+\tau) = -x(t) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}, \quad x_\tau = x(t+\cdot)|_{[0,1]} = -\varphi.$$

Sei $u = \dot{x}$; u ist stetig und stetig differenzierbar; aus $u(t) = \alpha f(x(t-1))$ für $t \geq 1$ folgt:

$$\dot{u}(t) = \alpha f'(x(t-1)) \dot{x}(t-1) = \alpha f'(x^\alpha(t-1, \varphi)) u(t-1).$$

Mit den Bezeichnungen von Definition 2.1 folgt somit wegen $u|_{[0,1]} = \dot{\varphi}$:

$$\dot{x}(t) = u(t) = U^\alpha(t, \varphi, \dot{\varphi}) \quad \text{für } t \geq 0.$$

Aus $x_\tau = -\varphi$ folgt schließlich mit Lemma 2.3:

$$-\dot{\varphi} = \dot{x}_\tau = \dot{x}(\tau+\cdot)|_{[0,1]} = U^\alpha(\tau, \varphi, \dot{\varphi})|_{[0,1]} = U_\tau^\alpha(\varphi)(\dot{\varphi}) = W_\varphi^\alpha \dot{\varphi}.$$

3. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$, $\xi \in C_0$, $\xi \in \mathbb{R} \dot{\varphi}$ und $W_\varphi^\alpha \xi = \lambda \xi$.

Für $\eta = \xi - \dot{\phi} \frac{\xi(0)}{\dot{\phi}(0)}$ gilt $\eta(0) = 0$, also $\eta \in C_0$ und

$$W_{\phi}^{\alpha} \eta = W_{\phi}^{\alpha} \xi - \frac{\xi(0)}{\dot{\phi}(0)} W_{\phi}^{\alpha} \dot{\phi} = \lambda \xi + \frac{\xi(0)}{\dot{\phi}(0)} \dot{\phi}$$

wegen $W_{\phi}^{\alpha} \dot{\phi} = -\dot{\phi}$.

Es folgt: $W_{\phi}^{\alpha} \eta(0) = \lambda \xi(0) + \frac{\xi(0)}{\dot{\phi}(0)} \dot{\phi}(0) = (1+\lambda) \cdot \xi(0)$, also

$$U_{\phi}^{\alpha} \eta = W_{\phi}^{\alpha} \eta - \dot{\phi} \cdot \frac{1}{\dot{\phi}(0)} W_{\phi}^{\alpha} \eta(0) = \lambda \xi + \frac{\xi(0)}{\dot{\phi}(0)} \dot{\phi} - \dot{\phi} \cdot \frac{1}{\dot{\phi}(0)} \cdot (1+\lambda) \cdot \xi(0) = \lambda \xi - \lambda \cdot \frac{\xi(0)}{\dot{\phi}(0)} \dot{\phi} = \lambda \eta.$$

Damit η Eigenfunktion von U_{ϕ}^{α} wird, muß noch $\eta \neq 0$ gezeigt werden.

Aus $\eta = 0$ folgt aber $\xi = \frac{\xi(0)}{\dot{\phi}(0)} \dot{\phi} \in \mathbb{R} \dot{\phi}$.

4. Sei $\eta \in C_0$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$, $\eta \neq 0$ und $U_{\phi}^{\alpha} \eta = \lambda \eta$.

Für $\xi = \eta + \frac{1}{1-\lambda} \dot{\phi} \cdot \frac{W_{\phi}^{\alpha} \eta(0)}{\dot{\phi}(0)} \in C$ gilt dann

$$\begin{aligned} W_{\phi}^{\alpha} \xi &= W_{\phi}^{\alpha} \eta + \frac{1}{1-\lambda} \frac{W_{\phi}^{\alpha} \eta(0)}{\dot{\phi}(0)} W_{\phi}^{\alpha} \dot{\phi} = U_{\phi}^{\alpha} \eta + \dot{\phi} \frac{W_{\phi}^{\alpha} \eta(0)}{\dot{\phi}(0)} - \frac{1}{1-\lambda} \frac{W_{\phi}^{\alpha} \eta(0)}{\dot{\phi}(0)} \dot{\phi} = \\ &= \lambda \eta + \frac{\lambda}{1-\lambda} \dot{\phi} \frac{W_{\phi}^{\alpha} \eta(0)}{\dot{\phi}(0)} = \lambda \xi, \end{aligned}$$

und ξ ist Eigenfunktion von W_{ϕ}^{α} , wenn $\xi \neq 0$ gilt.

Ist $\xi = 0$, so ist $\eta = \mu \dot{\phi}$ mit $\mu = -\frac{1}{1-\lambda} \frac{W_{\phi}^{\alpha} \eta(0)}{\dot{\phi}(0)}$, und es folgt:

$$\begin{aligned} \lambda \eta &= U_{\phi}^{\alpha} \eta = W_{\phi}^{\alpha} \eta - \dot{\phi} \frac{W_{\phi}^{\alpha} \eta(0)}{\dot{\phi}(0)} = \mu \cdot \left[W_{\phi}^{\alpha} \dot{\phi} - \dot{\phi} \frac{W_{\phi}^{\alpha} \dot{\phi}(0)}{\dot{\phi}(0)} \right] = \mu \cdot \left[-\dot{\phi} - \dot{\phi} \cdot \left(-\frac{\dot{\phi}(0)}{\dot{\phi}(0)} \right) \right] = \\ &= \mu [-\dot{\phi} + \dot{\phi}] = 0; \end{aligned}$$

wegen $\lambda \neq 0$ ist somit $\eta = 0$. ■

4. Der Kaplan-Yorke-Zweig symmetrischer Periode-4-Lösungen

Kaplan und Yorke haben 1974 erkannt, daß man falls $f \in C(\mathbb{R})$ ungerade ist, eine gewisse Klasse periodischer Lösungen der Gleichung

$$(*) \quad \dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1)), \quad t \geq 1$$

aus einem 2-dimensionalen Hamiltonschen System gewöhnlicher Differentialgleichungen erhalten kann.

Diese Lösungen haben alle die Symmetrieeigenschaft

$$(S) \quad x(t+2) = -x(t), \quad t \in \mathbb{R}$$

und somit die Periode 4.

Wir halten diese Klasse von Lösungen zunächst in der folgenden Definition fest, und zeigen dann eine Reihe von Eigenschaften.

Definition 4.1

Sei $f \in C(\mathbb{R})$ ungerade. Eine stetige Abbildung $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heißt spezielle symmetrische Lösung von (αf) , wenn gilt:

1. $x(0) = 0$,
2. $x_0 = x|_{[0,1]} \in C_0$ ist streng monoton,
3. $x(\cdot+2) = -x$,
4. x ist stetig differenzierbar und für $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1)).$$

Lemma 4.1

Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ ungerade, $f(0) = 0$, $f'(0) < 0$ und $xf(x) < 0$ für $x \neq 0$.

Sei $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spezielle symmetrische Lösung von (αf) und $z = x(1)$, $y = x(-1)$. Dann gilt:

1. (x, y) ist Lösung von

$$(*) \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \alpha f(y), & x(0) &= 0 \\ \dot{y} &= -\alpha f(x), & y(0) &= -z \end{aligned}$$

und es gilt: $x(1) = z$, $y(1) = 0$.

2. Ist $F = \int_0^1 f(u) du$, so gilt für alle $t \in \mathbb{R}$: $F(x(t)) + F(y(t)) = F(z)$.
3. x ist ungerade und y gerade.
4. es ist $x(0) = x(2) = 0$ und $x(t) \neq 0$ für $0 < t < 2$.

Beweis:

1. Für $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1)) = \alpha f(y(t)) ,$$

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t-1) = \alpha f(x(t-2)) = \alpha f(-x(t)) = -\alpha f(x(t)) ,$$

$$\text{und} \quad x(0) = 0 , y(0) = x(-1) = -x(-1+2) = -x(1) = -z ,$$

d.h. (x,y) ist Lösung des gewöhnlichen Anfangswertproblems (*).

Für $t=1$ folgt : $x(1) = z , y(1) = x(1-1) = x(0) = 0$.

2. Sei $w(t) = F(x(t)) + F(y(t)) , t \in \mathbb{R}$. Da F gerade ist, gilt :

$$w(0) = F(x(0)) + F(y(0)) = F(0) + F(-z) = F(z) ,$$

und mit 1. folgt :

$$\dot{w} = f(x) \dot{x} + f(y) \dot{y} = \alpha f(x) f(y) - \alpha f(y) f(x) = 0 ,$$

also $w(t) = w(0) = F(z)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

3. Sei $u(t) = -x(-t) , v(t) = y(-t)$ für $t \in \mathbb{R}$; dann sind u und v stetig und stetig differenzierbar mit

$$\dot{u}(t) = \dot{x}(-t) = \alpha f(y(-t)) = \alpha f(v(t)) ,$$

$$\dot{v}(t) = -\dot{y}(-t) = \alpha f(x(-t)) = -\alpha f(-x(-t)) = -\alpha f(u(t))$$

für $t \in \mathbb{R}$.

Wegen $u(0) = -x(0) = 0 , v(0) = y(0) = -z$ ist also (u,v) ebenfalls Lösung von (*), also ist $u = x$ und $v = y$.

4. $x(0) = x(2) = 0$ ist klar; da x auf $[0,1]$ streng monoton ist, ist $x(t) \neq 0$ für $0 < t \leq 1$. Wäre $x(t) = 0$ für ein $t \in]1,2[$, so wäre $s = 2-t \in]0,1[$ und $x(s) = x(2-t) = -x(-t) = x(t) = 0$. ■

Damit folgt auch, daß x symmetrische periodische Lösung ist nach Definition 3.2.

Die Gleichungen (*) heißen auch Kaplan-Yorke-Gleichungen. Wir zeigen als Nächstes, daß man aus diesen Gleichungen umgekehrt spezielle symmetrische Lösungen von (af) gewinnen kann :

Satz (Kaplan,Yorke [11])

Sei $f \in C^k(\mathbb{R})$ ungerade, $k \in \mathbb{N}$, $f(0) = 0$, $f'(0) < 0$, $x f(x) < 0$ für $x \neq 0$.

Dann gibt es k -mal stetig differenzierbare Abbildungen $(x,y): \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

und $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so daß für alle $(t,z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ gilt :

$$1. \quad \dot{x}(t,z) = \alpha(z) f(y(t,z))$$

$$\dot{y}(t,z) = -\alpha(z) f(x(t,z))$$

$$y(t,z) = x(t-1,z) .$$

2. $x(0,z) = 0$, $x(1,z) = z$, $y(0,z) = -z$, $y(1,z) = 0$,
3. $x(-t,z) = -x(t,z)$, $y(-t,z) = y(t,z)$,
 $x(t+2,z) = -x(t,z)$, $x(t+4,z) = x(t,z)$,
4. $x(t,-z) = -x(t,z)$, $y(t,-z) = -y(t,z)$, $\alpha(-z) = \alpha(z)$,
5. $x(t,0) = 0$, $y(t,0) = 0$, $\alpha(0) = -\frac{\pi}{2f'(0)}$,
6. $x(.,z)$, $y(.,z)$ sind für $z > 0$ auf $[0,1]$ streng monoton steigend.
7. Mit $F = \int_0^1 f(u) du$ gilt $F(x(t,z)) + F(y(t,z)) = F(z)$.

Beweis :

- a. Sei $\phi: \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ der maximale Fluß von

$$\dot{x} = f(y) , \dot{y} = -f(x) ,$$

also $\phi(., x_0, y_0): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die maximale Lösung mit Anfangswert

$$\phi(0, x_0, y_0) = (x_0, y_0) .$$

Dann ist ϕ C^k -Abbildung und wegen $f(0)=0$ ist $\phi(., 0, 0) = (0, 0)$.

Sei $(X, Y) = (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (t, z) \mapsto \phi(t, 0, -z) \in \mathbb{R}^2)$; dann ist (X, Y) C^k -Abbildung

mit: $\dot{X} = f(Y)$, $X(0, z) = 0$

$$\dot{Y} = -f(X) , Y(0, z) = -z$$

für alle $z \in \mathbb{R}$; für $z=0$ ist $X(., 0) = Y(., 0) = 0$.

- b. Sei $z \in \mathbb{R}$ und $x(t) = -X(t, -z)$, $y(t) = -Y(t, -z)$ für $t \in \mathbb{R}$.

Dann ist $x(0)=0$, $y(0)=-z$ und

$$\dot{x}(t) = -\dot{X}(t, -z) = -f(Y(t, -z)) = f(-Y(t, -z)) = f(y(t))$$

$$\dot{y}(t) = -\dot{Y}(t, -z) = f(X(t, -z)) = f(-x(t)) = -f(x(t)) ,$$

d.h. es gilt $(x, y) = \phi(., 0, -z) = (X(., z), Y(., z))$ bzw.

$$X(t, -z) = -X(t, z) , Y(t, -z) = -Y(t, z) , t, z \in \mathbb{R} .$$

- c. Sei $F = \int_0^1 f(u) du$; dann ist F gerade und $F(u)=0 \Leftrightarrow u=0$.

Behauptung: für $t, z \in \mathbb{R}$ gilt: $w(t, z) = F(X(t, z)) + F(Y(t, z)) = F(z)$.

Beweis: Es ist $w(0, z) = F(X(0, z)) + F(Y(0, z)) = F(0) + F(-z) = F(z)$ und:

$$\dot{w} = f(X) \dot{X} + f(Y) \dot{Y} = f(X)f(Y) - f(Y)f(X) = 0 .$$

- d. Sei $z \in \mathbb{R}^+$ und $x = X(., z)$, $y = Y(., z)$. Gibt es $\alpha > 0$ mit

$$x(t) + y(t) < 0 \text{ für } 0 \leq t < \frac{\alpha}{2} , x(\frac{\alpha}{2}) + y(\frac{\alpha}{2}) = 0 ,$$

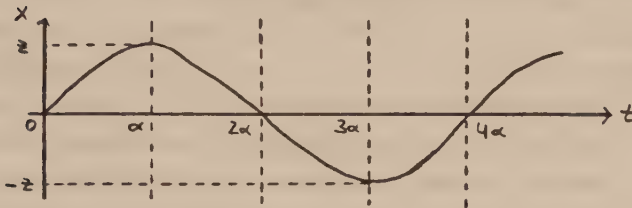
so gilt:

$$(i) \quad x(t) = -x(-t) , y(t) = y(-t) \text{ für } t \in \mathbb{R} ,$$

$$(ii) \quad x(t) = -y(\alpha - t) , y(t) = -x(\alpha - t) = x(t - \alpha) , t \in \mathbb{R} , x(\alpha) = z , y(\alpha) = 0 ,$$

$$(iii) \quad x(t+2\alpha) = -x(t) , y(t+2\alpha) = -y(t) \text{ für } t \in \mathbb{R} \text{ und } x(2\alpha) = 0 , y(2\alpha) = z ,$$

- (iv) $x(t+4\alpha) = x(t)$, $y(t+4\alpha) = y(t)$,
 $x(3\alpha) = -z$, $x(4\alpha) = 0$, $y(3\alpha) = 0$, $y(4\alpha) = -z$,
 d.h. (x, y) ist periodisch mit Periode 4α ,
 (v) x und y sind auf $[0, \alpha]$ streng monoton steigend,
 $0 < x(t) \leq z$ für $t \in]0, \alpha]$, $-z \leq y(t) < 0$ für $t \in [0, \alpha[$.



Beweis :

- (i) Sei $u(t) = -x(-t)$, $v(t) = y(-t)$ für $t \in \mathbb{R}$, dann gilt :

$$\dot{u}(t) = -\dot{x}(-t) = f(y(-t)) = f(v(t)), \quad u(0) = 0,$$

$$\dot{v}(t) = -\dot{y}(-t) = f(x(-t)) = -f(u(t)), \quad v(0) = -z.$$

Wegen der Eindeutigkeit ist also $x(t) = u(t) = -x(-t)$, $y(t) = v(t) = y(-t)$.

- (ii) Sei $c = x(\frac{\alpha}{2}) = -y(\frac{\alpha}{2})$ und $u(t) = -y(\alpha - t)$, $v(t) = -x(\alpha - t)$ für $t \in \mathbb{R}$,

dann gilt : $u(\frac{\alpha}{2}) = -y(\frac{\alpha}{2}) = c = x(\frac{\alpha}{2})$, $v(\frac{\alpha}{2}) = -x(\frac{\alpha}{2}) = -c = y(\frac{\alpha}{2})$,

$$\dot{u}(t) = \dot{y}(\alpha - t) = -f(x(\alpha - t)) = f(-x(\alpha - t)) = f(v(t)),$$

$$\dot{v}(t) = -\dot{x}(\alpha - t) = f(y(\alpha - t)) = f(-u(t)) = -f(u(t)).$$

also ist :

$$x(t) = u(t) = -y(\alpha - t), \quad y(t) = v(t) = -x(\alpha - t) = x(t - \alpha),$$

$$x(\alpha) = -y(0) = z, \quad y(\alpha) = -x(0) = 0.$$

- (iii) Sei $u(t) = -x(t+2\alpha)$, $v(t) = -y(t+2\alpha)$. Mit (ii) gilt dann :

$$u(0) = -x(2\alpha) = -(-y(\alpha - 2\alpha)) = y(-\alpha) = y(\alpha) = 0,$$

$$v(0) = -y(2\alpha) = -(x(2\alpha - \alpha)) = -x(\alpha) = -z,$$

$$\dot{u}(t) = -\dot{x}(t+2\alpha) = -f(y(t+2\alpha)) = f(-y(t+2\alpha)) = f(v(t)),$$

$$\dot{v}(t) = -\dot{y}(t+2\alpha) = f(x(t+2\alpha)) = f(-u(t)) = -f(u(t)),$$

also ist $x(t) = u(t) = -x(t+2\alpha)$, $y(t) = v(t) = -y(t+2\alpha)$.

- (iv) Mit (ii) und (iii) gilt :

$$x(3\alpha) = x(\alpha + 2\alpha) = -x(\alpha) = -z, \quad x(4\alpha) = x(2\alpha + 2\alpha) = -x(2\alpha) = 0,$$

$$y(3\alpha) = y(\alpha + 2\alpha) = -y(\alpha) = 0, \quad y(4\alpha) = y(2\alpha + 2\alpha) = -y(2\alpha) = -z.$$

Sei $u(t) = x(t+4\alpha)$, $v(t) = y(t+4\alpha)$, also $u(0) = 0$, $v(0) = -z$,

$$\dot{u}(t) = \dot{x}(t+4\alpha) = f(y(t+4\alpha)) = f(v(t)),$$

$$\dot{v}(t) = \dot{y}(t+4\alpha) = -f(x(t+4\alpha)) = -f(u(t)),$$

d.h. es ist $x(t) = u(t) = x(t+4\alpha)$, $y(t) = v(t) = y(t+4\alpha)$.

(v) Es genügt zu zeigen:

$$(*) \quad x(t) > 0 > y(t) \text{ für } 0 < t \leq \frac{\alpha}{2},$$

denn dann gilt:

$$x(t) > 0 \text{ für } 0 < t \leq \alpha:$$

dies ist wegen (*) klar für $0 < t \leq \frac{\alpha}{2}$;

für $\frac{\alpha}{2} < t < \alpha$ ist $\alpha - t \in]0, \frac{\alpha}{2}[$ und $x(t) = -y(\alpha - t) > 0$ wegen (*)

und (ü). Für $t = \alpha$ ist $x(\alpha) = z > 0$;

$$y(t) < 0 \text{ für } 0 \leq t < \alpha:$$

dies ist wegen (*) wieder klar für $0 < t \leq \frac{\alpha}{2}$;

für $t = 0$ ist $y(0) = -z < 0$; für $\frac{\alpha}{2} < t < \alpha$ ist $\alpha - t \in]0, \frac{\alpha}{2}[$ und

$y(t) = -x(\alpha - t) < 0$ wegen (*) und (ü).

Damit ist aber $\dot{x}(t) = f(y(t)) > 0$ für $0 \leq t < \alpha$, d.h. x ist auf $[0, \alpha]$ streng monoton steigend und $0 = x(0) < x(t) \leq x(\alpha) = z$ für $0 < t \leq \alpha$.

Entsprechend ist $\dot{y}(t) = -f(x(t)) > 0$ für $0 < t \leq \alpha$ und y ist auf $[0, \alpha]$ streng monoton steigend, $-z = y(0) \leq y(t) < y(\alpha) = 0$ für $0 \leq t < \alpha$.

Beweis von (*):

Es genügt $x(t) > 0$ für $0 < t \leq \frac{\alpha}{2}$ zu zeigen, denn nach Voraussetzung gilt dann für $0 < t < \frac{\alpha}{2}$: $0 > x(t) + y(t) > y(t)$,

und für $t = \frac{\alpha}{2}$: $y(\frac{\alpha}{2}) = -x(\frac{\alpha}{2}) < 0$.

Annahme: Es gibt $t' \in]0, \frac{\alpha}{2}]$ mit $x(t') = 0$.

Wegen $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = f(y(0)) = f(-z) > 0$ gibt es $\varepsilon > 0$ mit $x(t) > 0$ für $0 < t < \varepsilon$, und wir dürfen o.B. $x(t) > 0$ für $0 < t < t'$ annehmen.

Wegen $x(0) = 0 = x(t')$ gibt es $t'' \in]0, t'[$ mit $\dot{x}(t'') = f(y(t'')) = 0$; dann ist aber $y(t'') = 0$, $x(t'') > 0$ und wegen $0 < t'' < t' \leq \frac{\alpha}{2}$ folgt der Widerspruch: $0 > x(t'') + y(t'') = x(t'') > 0$.

Also ist die Annahme falsch, d.h. es ist $x(t) \neq 0$ für $t \in]0, \frac{\alpha}{2}]$.

Wegen $x(\frac{\alpha}{2}) > 0$ ist also $x(t) > 0$ für $t \in]0, \frac{\alpha}{2}]$, womit (*) bewiesen ist.

Damit ist nur noch zu zeigen: x hat die Periode 4α , d.h. für alle $\beta \in]0, \alpha[$ ist $x(. + 4\beta) = x$. Gibt es $\beta \in]0, \alpha[$ mit $x(. + 4\beta) = x$, so gilt:

$$x(2\beta) = x(-2\beta + 4\beta) = x(-2\beta) = -x(2\beta), \text{ also } x(2\beta) = 0.$$

Sei $t = 2\beta - 2\alpha$, also $0 = x(2\beta) = x(t+2\alpha) = -x(t) = x(-t) = x(2\alpha-2\beta)$.

Sei

$$\gamma = \begin{cases} \beta & \text{falls } 0 < \beta \leq \frac{\alpha}{2} \\ \alpha - \beta & \text{falls } \frac{\alpha}{2} < \beta < \alpha \end{cases}, \text{ also } \gamma \in]0, \frac{\alpha}{2}], x(2\gamma) = \begin{cases} x(2\beta) \\ x(2\alpha-2\beta) \end{cases} = 0.$$

Damit ist $2\gamma \in]0, \alpha]$ und aus dem bereits Bewiesenen folgt der Widerspruch :

$$0 = x(2\gamma) > 0.$$

e. Sei $z > 0$. Dann gibt es genau ein $\alpha > 0$ mit

$$Y(t, z) < 0 \text{ für } 0 \leq t < \alpha,$$

$$Y(\alpha, z) = 0,$$

$$X(t, z) + Y(t, z) < 0 \text{ für } 0 \leq t < \frac{\alpha}{2},$$

$$X(\frac{\alpha}{2}, z) + Y(\frac{\alpha}{2}, z) = 0,$$

und die Beziehungen aus d. gelten.

Beweis: Sei $x = X(., z)$, $y = Y(., z)$.

Behauptung: es gibt genau ein $\alpha > 0$ mit $y(t) < 0$ für $0 \leq t < \alpha$, $y(\alpha) = 0$.

Daß α eindeutig bestimmt ist, ist klar. Ist die Behauptung falsch, so ist $y(t) < 0$ für alle $t \geq 0$, also $\dot{x}(t) = f(y(t)) > 0$ für $t \geq 0$, d.h. x ist auf $\mathbb{R}_0^+$ streng monoton steigend. Wegen $x(0) = 0$ ist somit $x(t) > 0$ für $t > 0$ und $\dot{y}(t) = -f(x(t)) > 0$, d.h. y ist auf $\mathbb{R}_0^+$ ebenfalls streng monoton steigend und somit gilt $-z \leq y(t) < 0$ für $t \geq 0$.

Weiter ist $0 \leq x(t) < z$ für alle $t \geq 0$, denn sonst gibt es $\tilde{t} \geq 0$ mit $x(\tilde{t}) = z$ und es ist mit c.

$$F(z) = F(x(\tilde{t})) + F(y(\tilde{t})) = F(z) + F(y(\tilde{t})),$$

also $F(y(\tilde{t})) = 0$ bzw. $y(\tilde{t}) = 0$.

Somit ist $(x(t), y(t)) \in [0, z] \times [-z, 0]$ für $t \in \mathbb{R}_0^+$, und $(a, b) = \lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t))$

existiert. Es ist $(a, b) \in [0, z] \times [-z, 0]$ sowie $0 \leq x(t) < a$, $-z \leq y(t) < b$ für $t \geq 0$. Weiter gilt:

$$F(z) = \lim_{t \rightarrow \infty} (F(x(t)) + F(y(t))) = F(a) + F(b),$$

also ist $(a, b) \neq (0, 0)$, da sonst $F(z) = 0$ und $z = 0$ wäre.

Sei etwa $a \neq 0$. Dann ist $a > 0$ und es gibt $\varepsilon > 0$ mit $0 \in [a - \varepsilon, a]$.

Weiter existiert $\lambda = \min_{|u-a| \leq \varepsilon} -f(u) > 0$ und ein $t^* \geq 0$ mit $a - \varepsilon \leq x(t) \leq a$ für alle $t \geq t^*$.

Also ist $0 < \lambda \leq -f(x(t)) = \dot{y}(t)$ für $t \geq t^*$ und

$$y(t) = y(t^*) + \int_{t^*}^t \dot{y}(s) ds \geq y(t^*) + \lambda(t-t^*) > b.$$

Dies ist für genügend großes t ein Widerspruch zu $y(t) < b$.

Entsprechend erhält man einen Widerspruch falls $b \neq 0$.

Damit gibt es $\bar{t} \geq 0$ mit $y(\bar{t}) \geq 0$ und somit $\alpha \in]0, \bar{t}]$ mit $y(\alpha) = 0$.

Sei o.B. $y(t) < 0$ für $0 \leq t < \alpha$.

Dann ist x wegen $\dot{x} = f(y)$ auf $[0, \alpha]$ streng monoton steigend, also $x(t) > 0$ für $0 < t \leq \alpha$. Es folgt $x(\alpha) + y(\alpha) = x(\alpha) > 0$, und wegen $x(0) + y(0) = -z < 0$ gibt es ein $\beta \in]0, \alpha[$ mit $x(\beta) + y(\beta) = 0$. Sei o.B. $x(t) + y(t) < 0$ für $0 \leq t < \beta$. Dann folgt mit d.(ii) $y(2\beta) = 0$; nach Definition von α ist also $2\beta \geq \alpha$ bzw. $\beta \geq \frac{\alpha}{2}$. Sei $\gamma = 2\beta - \alpha$, wegen $\frac{\alpha}{2} \leq \beta < \alpha$ ist $0 \leq \gamma < \alpha$. Mit d.(ii, v) gilt $x(2\beta - t) = -y(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, also $x(\gamma) = x(2\beta - \alpha) = -y(\alpha) = 0$; und wegen $x(t) > 0$ für $0 < t \leq \alpha$ liefert $\gamma \neq 0$ den Widerspruch $0 = x(\gamma) > 0$.

Also ist $\gamma = 0$ und $\beta = \frac{\alpha}{2}$.

f. Sei $z > 0$, $\alpha = \alpha(z)$ mit den Eigenschaften aus e.

Die so definierte Abbildung $\alpha: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ist k -mal stetig differenzierbar.

Beweis:

Sei $z_0 > 0$, $\alpha_0 = \alpha(z_0)$ und $h = (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (z, t) \mapsto Y(t, z) \in \mathbb{R})$, also $h(z_0, \alpha_0) = 0$ und

$$Dh(z_0, \cdot)(\alpha_0) = \dot{Y}(\alpha_0, z_0) = -f(X(\alpha_0, z_0)) = -f(z_0) > 0.$$

Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es also eine offene Umgebung $I \times J \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ von (z_0, α_0) und eine C^k -Abbildung $\beta: I \rightarrow J$ mit $\beta(z_0) = \alpha_0$ und

$$h^{-1}(\{0\}) \cap I \times J = \text{graph } \beta.$$

Für alle $z \in I$ ist also $Y(\beta(z), z) = h(z, \beta(z)) = 0$.

Behauptung: Nach ggf. Verkleinern von I gilt für alle $z \in I$ und $0 \leq t < \beta(z)$:

$$Y(t, z) < 0.$$

Beweis:

Andernfalls gibt es eine gegen z_0 konvergierende Folge $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in I und zu jedem $k \in \mathbb{N}$ ein $t_k \in [0, \beta(z_k)[$ mit $Y(t_k, z_k) \geq 0$. Wegen $Y(0, z_k) = -z_k < 0$ dürfen wir o.B. $Y(t_k, z_k) = 0$ annehmen.

Wegen $\beta(z_k) \rightarrow \beta(z_0)$ ist $(\beta(z_k))_{k \in \mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, etwa durch $\gamma > 0$.

Dann ist $t_k \in [0, \gamma]$, d.h. $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert o.B. gegen ein $t_0 \in [0, \gamma]$.

Somit gilt: $(z_k, t_k) \rightarrow (z_0, t_0)$ und $0 = Y(t_k, z_k) \rightarrow Y(t_0, z_0)$ für $k \rightarrow \infty$.

Also ist $Y(t_0, z_0) = 0$ und wegen $Y(t, z_0) < 0$ für $0 \leq t < \alpha_0$ folgt $t_0 \geq \alpha_0$.

Andererseits folgt aber $t_0 \leq \beta(z_0) = \alpha_0$ aus $0 \leq t_k < \beta(z_k)$, d.h. es ist $t_0 = \alpha_0$.

Wegen $(z_k, t_k) \rightarrow (z_0, \alpha_0) \in I \times J$ ist $(z_k, t_k) \in I \times J$ für genügend großes $k \in \mathbb{N}$; wegen $h(z_k, t_k) = 0$ folgt dann $(z_k, t_k) \in h^{-1}(\{0\}) \cap I \times J = \text{graph } \beta$, d.h.

$t_k = \beta(z_k)$ in Widerspruch zu $t_k < \beta(z_k)$.

Nach Definition von α ist somit $\beta(z) = \alpha(z)$ für alle $z \in I$, d.h. $\alpha = \beta|_I$ ist stetig und k -mal stetig differenzierbar in $z_0 > 0$.

Damit ist α auf $\mathbb{R}^+$ stetig und k -mal stetig differenzierbar.

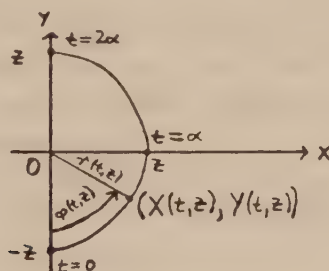
g. Es ist $\lim_{z \rightarrow 0^+} \alpha(z) = \alpha(0^+) = -\frac{\pi}{2f'(0)}$.

Sei $z > 0$ und $\alpha = \alpha(z)$. Dann sei für $t \in [0, 2\alpha]$:

$$r(t, z) = (X^2(t, z) + Y^2(t, z))^{\frac{1}{2}}.$$

Mit $c(i, \ddot{u}, v)$ folgt $X(t, z) > 0$ und $r(t, z) \neq 0$ für $t \in [0, 2\alpha]$, und es gibt genau ein $\varphi(t, z) \in [0, \pi]$ mit

$$X(t, z) = r(t, z) \cdot \sin \varphi(t, z), \quad Y(t, z) = -r(t, z) \cdot \cos \varphi(t, z).$$



Die Abbildungen $r(., z)$ und $\varphi(., z)$ sind differenzierbar mit:

$$\begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi & r \cos \varphi \\ -\cos \varphi & r \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix},$$

also:

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \sin \varphi & -r \cos \varphi \\ \cos \varphi & \sin \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} X & \frac{1}{r} Y \\ -\frac{1}{r^2} Y & \frac{1}{r^2} X \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(Y) \\ -f(X) \end{pmatrix}$$

und somit:

$$\dot{r} = \frac{1}{r} [X f(Y) - Y f(X)], \quad \dot{\varphi} = -\frac{1}{r^2} [X f(X) + Y f(Y)].$$

Aus $X(0, z) = 0, Y(0, z) = -z$ folgt: $r(0, z) = z, \varphi(0, z) = 0$,

und aus $X(\alpha(z), z) = z, Y(\alpha(z), z) = 0$ erhält man:

$$\varphi(\alpha(z), z) = \frac{\pi}{2}, \quad r(\alpha(z), z) = z.$$

Die Gleichung für $\dot{\varphi}$ ergibt somit

$$\varphi(t, z) = - \int_0^t \frac{X f(X) + Y f(Y)}{X^2 + Y^2} (s, z) ds ,$$

speziell :

$$\xi = - \int_0^{\alpha(z)} \frac{X f(X) + Y f(Y)}{X^2 + Y^2} (t, z) dt .$$

Da f in 0 differenzierbar ist, gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit

$$|f(u) - f'(0)u| \leq \varepsilon |u| \quad \text{für alle } u \in \mathbb{R} \text{ mit } |u| < \delta .$$

Sei $0 < z < \delta$; $t \in [0, \alpha(z)]$. Dann gilt :

$$0 \leq X(t, z) \leq z < \delta , \text{ also } |f(X(t, z)) - f'(0)X(t, z)| \leq \varepsilon |X(t, z)| ,$$

$$-\delta < -z \leq Y(t, z) \leq 0 , \text{ also } |f(Y(t, z)) - f'(0)Y(t, z)| \leq \varepsilon |Y(t, z)| .$$

Es folgt mit $\alpha = \alpha(z) \neq 0$ (wobei wir der Übersichtlichkeit halber die Argumente weglassen) :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\pi}{2\alpha} + f'(0) \right| &= \left| f'(0) - \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \frac{X f(X) + Y f(Y)}{X^2 + Y^2} dt \right| = \\ &= \frac{1}{\alpha} \left| \int_0^\alpha \left[\frac{X^2 + Y^2}{X^2 + Y^2} f'(0) - \frac{X f(X) + Y f(Y)}{X^2 + Y^2} \right] dt \right| = \\ &= \frac{1}{\alpha} \left| \int_0^\alpha \left(\frac{X}{X^2 + Y^2} [X f'(0) - f(X)] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{Y}{X^2 + Y^2} [Y f'(0) - f(Y)] \right) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \left(\left| \frac{X}{X^2 + Y^2} \right| \cdot |f(X) - f'(0)X| + \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{Y}{X^2 + Y^2} \right| \cdot |f(Y) - f'(0)Y| \right) dt \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha \left(\left| \frac{X^2}{X^2 + Y^2} \right| \cdot \varepsilon + \left| \frac{Y^2}{X^2 + Y^2} \right| \cdot \varepsilon \right) dt = \\ &= \frac{\varepsilon}{\alpha} \int_0^\alpha \left(\frac{X^2}{X^2 + Y^2} + \frac{Y^2}{X^2 + Y^2} \right) dt = \frac{\varepsilon}{\alpha} \cdot \alpha = \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $0 < z < \delta$, d.h. es ist $\lim_{z \rightarrow 0-} \frac{\pi}{2\alpha(z)} = -f'(0)$.

h. Sei nun $x(t, z) = X(\alpha(z), t, z)$ für $z > 0, t \in \mathbb{R}$,

$$x(t, 0) = 0 \quad \text{für } z = 0, t \in \mathbb{R} ,$$

$$x(t, z) = -X(\alpha(z), t, -z) \quad \text{für } z < 0, t \in \mathbb{R}, \alpha(z) = -\alpha(-z) ,$$

und entsprechend für $y(t, z)$; dann folgen 1., 2. aus a. und d(ii), 3. aus d(i, ii, iii), 4. aus b., 5. aus der Definition und g., 6. aus d(v) und 7. aus c. ■

Bemerkung :

Die Voraussetzung $xf(x) < 0$ für $x \neq 0$ läßt sich abschwächen zu $xf(x) < 0$ für $0 < |x| < a, a > 0$, falls man sich auf Amplituden z mit $|z| < a$ beschränkt.

Wir wollen zeigen, daß wir durch den Satz von Kaplan und Yorke alle speziellen symmetrischen Lösungen erhalten haben :

Lemma 4.2

Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ ungerade, $f(0) = 0$, $f'(0) < 0$ und $xf(x) < 0$ für $x \neq 0$.

Sei $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spezielle symmetrische Lösung von f .

Dann ist $x = x(., z)$ mit $z = x(1)$.

Beweis :

a. Sei $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spezielle symmetrische Lösung und $\alpha \in \mathbb{R}$, so daß für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt : $\dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1))$.

Dann folgt aus Lemma 4.1(1) mit $y = x(.-1)$:

$$\begin{aligned} (*) \quad \dot{x} &= \alpha f(y) \quad , \quad x(0) = 0 \\ \dot{y} &= -\alpha f(x) \quad , \quad y(0) = -z. \end{aligned}$$

b. Mit Lemma 4.1 folgt weiter :

(i) x ist ungerade,

(ii) ist $x(t) = 0$ und $t > 0$, so ist $t \geq 2$,

(iii) es ist $\alpha \neq 0$, denn sonst folgt $\dot{x} = 0$, $x(0) = 0$ aus (*) und $x \equiv 0$ wäre nicht streng monoton,

(iv) Sei $u(t) = x(\frac{t}{\alpha})$, $v(t) = y(\frac{t}{\alpha})$ für $t \in \mathbb{R}$. Dann ist (u, v) die Lösung von

$$\begin{aligned} \dot{u} &= f(v) \quad , \quad u(0) = 0 \\ \dot{v} &= -f(u) \quad , \quad v(0) = -z, \end{aligned}$$

denn :

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= \frac{1}{\alpha} \dot{x}\left(\frac{t}{\alpha}\right) = \frac{\alpha}{\alpha} f\left(y\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right) = f(v(t)) \quad , \quad u(0) = x(0) = 0 \quad , \\ \dot{v}(t) &= \frac{1}{\alpha} \dot{y}\left(\frac{t}{\alpha}\right) = -\frac{\alpha}{\alpha} f\left(x\left(\frac{t}{\alpha}\right)\right) = -f(u(t)) \quad , \quad v(0) = y(0) = -z. \end{aligned}$$

c. Sei nun $\bar{x} = x(., z)$, $\bar{y} = y(., z)$ und $\bar{\alpha} = \alpha(z)$ aus dem Satz von Kaplan und Yorke. Wir müssen $\bar{x} = x$, $\bar{y} = y$, $\bar{\alpha} = \alpha$ zeigen.

Zunächst gelten b(i, ii, iii, iv) analog für $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{\alpha}$, d.h. für $\bar{u} = \bar{x}(\frac{t}{\bar{\alpha}})$, $\bar{v} = \bar{y}(\frac{t}{\bar{\alpha}})$ gilt :

$$\begin{aligned} \dot{\bar{u}} &= f(\bar{v}) \quad , \quad \bar{u}(0) = 0 \\ \dot{\bar{v}} &= -f(\bar{u}) \quad , \quad \bar{v}(0) = -z. \end{aligned}$$

Wegen der Eindeutigkeit folgt also $\bar{u} = u$, $\bar{v} = v$ bzw. $\bar{x}(\frac{t}{\bar{\alpha}}) = x(\frac{t}{\alpha})$ für $t \in \mathbb{R}$. Mit $\beta = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha}$ bedeutet dies $\bar{x}(t) = x(\beta t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und wir müssen nur noch $\beta = 1$ zeigen.

1. Fall : $\beta > 0$:

$$0 = \bar{x}(2) = x(2\beta) \quad , \quad 2\beta > 0 \implies 2\beta \geq 2 \quad \text{bzw.} \quad \beta \geq 1 \quad ,$$

$$0 = x(2) = \bar{x}\left(\frac{2}{\beta}\right) \quad , \quad \frac{2}{\beta} > 0 \implies \frac{2}{\beta} \geq 2 \quad \text{bzw.} \quad \beta \leq 1 \quad , \quad \text{also} \quad \beta = 1 \quad ;$$

2. Fall : $\beta < 0$:

$$0 = \bar{x}(2) = x(2\beta) = -x(-2\beta) \implies x(-2\beta) = 0, -2\beta > 0 \implies -2\beta \geq 2 \text{ bzw. } -\beta \geq 1,$$

$$0 = x(2) = \bar{x}\left(\frac{2}{\beta}\right) = -\bar{x}\left(-\frac{2}{\beta}\right) \implies \bar{x}\left(-\frac{2}{\beta}\right) = 0, -\frac{2}{\beta} > 0 \implies -\frac{2}{\beta} \geq 2 \text{ bzw. } -\beta \leq 1,$$

d.h. es ist $\beta = -1$, also $z = \bar{x}(1) = x(\beta) = x(-1) = -z$, und somit $z = 0$.

Aus (*) folgt dann aber $x = y = 0$, und x ist auf $[0,1]$ nicht streng monoton. ■

Wir wollen dies festhalten in folgender

Definition 4.2

Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ ungerade, $f(0) = 0$, $f'(0) < 0$ und $xf(x) < 0$ für $x \neq 0$.

Dann heißt

$$PZ(f) = \{ (\alpha(z), x(.,z) |_{[0,1]}) \in \mathbb{R}^* \times C_0 \mid z \in \mathbb{R}^* \} \subseteq \mathbb{R}^* \times C_0$$

Primärzweig der symmetrischen Periode-4-Lösungen oder kurz Kaplan-Yorke-Zweig von f .

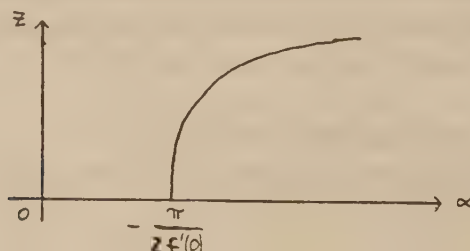
Für $z \geq 0$ stimmt z mit der Amplitude von $x(.,z)$ überein, d.h. es ist

$$z = \max_{t \in \mathbb{R}} |x(t,z)|.$$

Andrerseits ist $x(0,z) = 0$, $x(1,z) = z$.

Daher wird oft auch für beliebige periodische Lösungen $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x(0) = 0$ $x(1)$ als Amplitude von x bezeichnet. Dies wird auch dadurch gerechtfertigt, daß wegen $\dot{x}(1) = \alpha f(x(0)) = \alpha f(0) = 0$ bei $t=1$ ein relatives Extremum vorliegt. I.A. werden aber $x(1)$ und $\max_{t \geq 0} |x(t)|$ verschieden sein.

Wir tragen nun für jede solche Lösung x den Punkt $(\alpha, x(1))$ in ein Verzweigungsdiagramm ein. Wegen $f(0) = 0$ ist $x \equiv 0$ stets Lösung, d.h. die α -Achse gehört zum Verzweigungsdiagramm. Für den Kaplan-Yorke-Zweig haben wir aus dem Satz von Kaplan und Yorke $\alpha(0) = -\frac{\pi}{2f'(0)}$ erhalten, d.h. die symmetrischen Periode-4-Lösungen zweigen bei $\alpha = -\frac{\pi}{2f'(0)}$ von der α -Achse ab. Wir erhalten somit qualitativ folgendes Diagramm :



Hier ergeben sich die folgenden zwei Fragen

- was läßt sich über die Richtung der Verzweigung im Verzweigungspunkt $\alpha = -\frac{\pi}{2f'(0)}$ sagen ?
- lassen sich asymptotische Aussagen für $\alpha \rightarrow \infty$ machen ?

Für die erste Frage wollen wir die Arbeiten von Walther [17] und dem Autor [5] zitieren.

Theorem 3 in [17] bedeutet, daß im Fall $f'''(0) < 0$ Rückwärtsverzweigung vorliegt. In [5] finden wir für $f(x) = -x + bx^3$, $b \in \mathbb{R}$ die stärkere Aussage

$$\alpha'(0) = 0, \quad \alpha''(0) = \frac{\pi}{6} \frac{f'''(0)}{[f'(0)]^2},$$

die wir inzwischen für alle ungeraden $f \in C^3(\mathbb{R})$ zeigen konnten.

Asymptotische Aussagen findet man in [5], [15]; hieraus läßt sich z.B. für das von Hadeler in [7] numerisch untersuchte Beispiel $f(x) = -x \cdot \frac{1+x^2}{1+x^4}$, $x \in \mathbb{R}$ zeigen, daß die Situation des folgenden Diagrammes vorliegt:



Für die vorliegende Arbeit ergibt sich dadurch folgende Konsequenz :

Wir hatten den Kaplan-Yorke-Zweig durch die Amplitude z parameterisiert. Dies ist für den Verzögerungsparameter α nicht immer möglich, da es zwei oder mehr verschiedene Kaplan-Yorke-Lösungen mit verschiedenen Amplituden z , aber gleichem α geben kann. Daher ist es sinnvoll, im weiteren die Amplitude z als Verzweigungsparameter anstelle von α zu wählen.

Als Letztes wollen wir in diesem Abschnitt noch ohne Beweis feststellen :

Lemma 4.3

Die Abbildung $\mathbb{R} \ni z \mapsto x_0^z = x(.,z)|_{[0,1]} \in C_0$ ist stetig differenzierbar mit

$$Dx_0^z = \frac{\partial x}{\partial z}(.,z)|_{[0,1]}.$$

■

Hierbei muß man nur von der Tatsache Gebrauch machen, daß $x(.,z)$ und $\frac{\partial x}{\partial z}(.,z)$ auf $[0,1]$ gleichmäßig stetig sind.

5. Die Verzweigungsgleichung

In diesem Abschnitt sei

$f \in C^2(\mathbb{R})$ ungerade, $f(0) = 0$, $f'(0) < 0$, $xf(x) < 0$ für $x \neq 0$.

Weiter seien $\Lambda^\alpha, \Omega^\alpha, \tau^\alpha, Q^\alpha, P^\alpha$ die Abbildungen aus Abschnitt 3. Für $z > 0$ sei schließlich $x(\cdot, z): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Kaplan-Yorke-Lösung von $(\alpha(z)f)$ mit Amplitude z und den Eigenschaften des letzten Abschnittes. Weiter sei $x_1^z = x(t+\cdot, z)|_{[0,1]} \in C$ für $t \in \mathbb{R}, z > 0$, insbesondere $x_0^z = x(\cdot, z)|_{[0,1]} \in C_0$. Wir wollen nun mit einer geeigneten Verzweigungsgleichung einen Verzweigungspunkt auf dem Kaplan-Yorke-Zweig suchen, bei dem symmetrische periodische Lösungen abzweigen. Zuvor wenden wir aber noch die Poincaréabbildung auf x_0^z an:

Lemma 5.1

Für alle $z > 0$ ist $x_0^z \in \Lambda^{\alpha(z)}$, $x_0^z \in \Omega^{\alpha(z)}$, und es gilt:

$$\tau^{\alpha(z)}(x_0^z) = 2, \quad Q^{\alpha(z)}(x_0^z) = -x_0^z, \quad P^{\alpha(z)}(x_0^z) = x_0^z.$$

Beweis:

Sei $z > 0, \alpha = \alpha(z)$, also $x^\alpha(t, x_0^z) = x(t, z)$ für $t \in \mathbb{R}_0^+$. Mit Definition 3.1(1) gilt dann:

$$x_0^z \in \Lambda^\alpha \Leftrightarrow (\alpha, x_0^z) \in \Lambda \Leftrightarrow \text{es gibt } t > 1 \text{ mit } x(t, z) = 0, \dot{x}(t, z) \neq 0 \text{ und} \\ x(s, z) \neq 0 \text{ für } s \in [1, 1+t] \setminus \{t\}.$$

Dies ist aber für $t=2$ richtig, denn aus dem Satz von Kaplan-Yorke folgt:

$$x(2, z) = -x(0, z) = 0, \quad \dot{x}(2, z) = \alpha f(x(1, z)) = \alpha f(z) \neq 0,$$

da $f(z) \neq 0$ für $z \neq 0$ ist. Weiter ist mit Lemma 4.1(4) $x(s, z) \neq 0$ für $0 < s < 2$ bzw. für $s \in [1, 3] \setminus \{2\}$ wegen $x(\cdot + 2) = -x$. Damit ist $x_0^z \in \Lambda^\alpha$ und $\tau^\alpha(x_0^z) = 2$. Somit gilt: $Q^\alpha(x_0^z) = x(\tau^\alpha(x_0^z) + \cdot, z)|_{[0,1]} = x(2 + \cdot, z)|_{[0,1]} = -x(\cdot, z)|_{[0,1]} = -x_0^z$. Hieraus folgt auch $P^\alpha(x_0^z) = x_0^z$. ■

Es ist also $(\alpha(z), x_0^z) \in \Lambda$ und $x_0^z \in \Omega^{\alpha(z)}$ für alle $z > 0$, d.h. es gilt:

$$PZ(f) = \{ (\alpha(z), x_0^z) \mid z > 0 \} \subseteq \Lambda.$$

Damit erhalten wir:

Lemma 5.2

1. Sei $h: \mathbb{R}^+ \times C_0 \ni (z, \varphi) \mapsto (\alpha(z), x_0^z + \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C_0$.

Dann ist h stetig differenzierbar, $h(\mathbb{R}^+ \times \{0\}) = PZ(f) \subseteq \Lambda$, und

$\Lambda^* = h^{-1}(\Lambda) \subseteq \mathbb{R}^+ \times C_0$ ist offene Umgebung von $\mathbb{R}^+ \times \{0\}$.

2. Sei $g = (\Lambda^* \ni (z, \varphi) \mapsto Q(\alpha(z), x_0^z + \varphi) + x_0^z + \varphi \in C_0)$;

dann ist g stetig differenzierbar, $g(z, 0) = 0$ für alle $z > 0$, und

ist $g(z, \varphi) = 0$ für ein $(z, \varphi) \in \Lambda^*$, so ist durch $x^{\alpha(z)}(\cdot, x_0^z + \varphi)$ eine symmetrische periodische Lösung von $(\alpha(z)f)$ mit Periode $2\tau^{\alpha(z)}(x_0^z + \varphi)$ und Amplitude $z + \varphi(1)$ gegeben.

Beweis :

1. Die Abbildungen $z \mapsto \alpha(z)$, $z \mapsto x_0^z$ sind stetig differenzierbar, also auch h . Damit ist $\Lambda^* = h^{-1}(\Lambda)$ offen in $\mathbb{R}^* \times C_0$.

Sei $z \in \mathbb{R}^*$, dann ist $h(z, 0) = (\alpha(z), x_0^z) \in PZ(f)$, also $h(\mathbb{R}^* \times \{0\}) \subseteq PZ(f)$.

Sei $(\alpha, \varphi) \in PZ(f)$, also $\alpha(z) = \alpha$, $x_0^z = \varphi$ für ein $z \in \mathbb{R}^*$. Dann folgt

$(\alpha, \varphi) = (\alpha(z), x_0^z) = h(z, 0) \in h(\mathbb{R}^* \times \{0\})$. Es ist also $h(\mathbb{R}^* \times \{0\}) = PZ(f) \subseteq \Lambda$ bzw.

$$\mathbb{R}^* \times \{0\} = h^{-1}(PZ(f)) \subseteq h^{-1}(\Lambda) = \Lambda^*.$$

2. Zunächst ist g definiert, denn es ist $(\alpha(z), x_0^z + \varphi) = h(z, \varphi) \in \Lambda$ für

$(z, \varphi) \in \Lambda^*$ und $Q(\alpha(z), x_0^z + \varphi) \in C_0$ existiert. Aus $g(z, \varphi) = Q(h(z, \varphi)) + x_0^z + \varphi$ für $(z, \varphi) \in \Lambda^*$ folgen Stetigkeit und Differenzierbarkeit von g .

Für $z > 0$ ist $g(z, 0) = Q(\alpha(z), x_0^z) + x_0^z = -x_0^z + x_0^z = 0$ mit dem vorherigen Lemma.

Sei $(z, \varphi) \in \Lambda^*$, $g(z, \varphi) = 0$. Ist $\alpha = \alpha(z)$, $\varphi = x_0^z + \varphi$, so folgt aus $g(z, \varphi) = 0$:

$Q^\alpha(\varphi) = -\varphi$ und die Behauptung folgt mit Lemma 3.3(2). ■

Damit lautet die Verzweigungsgleichung für das Abzweigen symmetrischer periodischer Lösungen vom Primärzweig: $g(z, \varphi) = 0$.

Für diese Gleichung suchen wir einen "differenzierbaren Verzweigungspunkt".

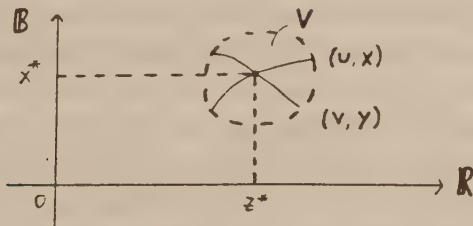
Dieser Begriff sei zunächst definiert:

Definition 5.1

Sei B ein Banachraum, $U \subseteq \mathbb{R} \times B$ offen, $h: U \rightarrow B$ stetig und $(z^*, x^*) \in U$.

Dann heißt (z^*, x^*) Verzweigungspunkt von $h(z, x) = 0$, wenn es eine offene

Umgebung $V \subseteq U$ von (z^*, x^*) , offene Intervalle $I, J \subseteq \mathbb{R}$ um $0 \in \mathbb{R}$ und stetige Abbildungen $(u, x): I \rightarrow V$, $(v, y): J \rightarrow V$ gibt mit:



$$(i) \quad u(0) = v(0) = z^*, \quad x(0) = y(0) = x^*,$$

$$(ii) \quad (u, x)(I) \cap (v, y)(J) = \{(z^*, x^*)\},$$

$$(iii) \quad h^{-1}(\{0\}) \cap V = (u, x)(I) \cup (v, y)(J).$$

Sind (u, x) und (v, y) zusätzlich differenzierbar, so heißt (z^*, x^*) differenzierbarer Verzweigungspunkt von $h(z, x) = 0$.

Die Lösungen von $h(z, x) = 0$ sind also lokal bei (z^*, x^*) gegeben durch zwei stetige Kurven, die sich in (z^*, x^*) schneiden.

Ist h C^2 -Abbildung und eine "triviale" Lösungskurve bekannt, so liefert der Satz über die Verzweigung vom einfachen Eigenwert ein Kriterium für die Existenz eines Verzweigungspunktes auf dieser Lösungskurve ([4]). Unsere Abbildung g ist nun aber nur einmal stetig differenzierbar, daher benutzen wir folgende Version dieses Satzes, die wir im Anhang beweisen werden (Satz 14.1):

Satz (Verzweigung vom einfachen Eigenwert)

Sei B Banachraum, $z^* \in \mathbb{R}$, $J \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall um z^* und $U \subseteq B$ offene Umgebung von $0 \in B$. Sei $h: J \times U \rightarrow B$ stetig differenzierbar mit $h|_{J \times \{0\}} = 0$. Es gelte:

1. Es gibt stetiges $H: W \rightarrow B$, $W = \{(s, z, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times B \mid (z, sx) \in J \times U\}$ mit $Dh(., sx)(z) = s \cdot H(s, z, x)$ für alle $(s, z, x) \in W$.

2. $A^* = Dh(z^*, .)(0) \in L(B, B)$ ist Fredholmoperator mit Index 0.

3. Es gibt $b \in B$ mit Kern $A^*b = \mathbb{R}b$ und $H(0, z^*, b) \in \text{Bild } A^*$.

Dann gibt es offenes $\hat{J} \times \hat{U} \subseteq \mathbb{R} \times B$ mit $(0, 0) \in \hat{J} \times \hat{U}$, offenes $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und stetiges $(z, x): I \rightarrow \hat{J} \times \hat{U}$ mit

a. $z(0) = z^*$, $x(0) = 0$, $x(s) \neq 0$ für $s \in I \setminus \{0\}$,

b. (z, x) ist in $I \setminus \{0\}$ stetig differenzierbar, x ist in 0 differenzierbar mit $\dot{x}(0) = b$,

c. $h^{-1}(\{0\}) \cap (\hat{J} \times \hat{U}) = (\hat{J} \times \{0\}) \cup (z, x)(I)$.

Zusatz: Aus der 1. Voraussetzung folgt, daß $\exists z \mapsto Dh(z, .)(0) b \in B$

differenzierbar ist mit $\frac{d}{dz}|_{z^*} [Dh(z, .)(0) b] = H(0, z^*, b)$.

Es läßt sich allerdings nicht zeigen, daß (z, x) auf I stetig differenzierbar ist. Ist U konvex und h C^2 -Abbildung, bzw. existiert $\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} h$ und ist stetig, so ist die 1. Bedingung erfüllt mit $H(s, z, x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} h(z, tsx)(x) dt$ (vgl. [4]). In unserer Anwendung werden wir $Dh(., x)(z)$ darstellen durch

$$Dh(., x)(z) = h_1(z, x) \cdot h_2(z, x) + h_3(z, x)$$

mit $h_1 \in C(J \times U, B)$, $h_2 \in C^1(J \times U, \mathbb{R})$, $h_3 \in C^1(J \times U, B)$ und $h_2|_{J \times \{0\}} = 0$.

Wegen $h(.,0) = 0$ ist $Dh(.,0)(z) = 0$ für alle $z \in J$, also auch $h_3(z,0) = 0$. Da h_2 und h_3 stetig differenzierbar sind, gibt es stetige $H_2: W \rightarrow \mathbb{R}$, $H_3: W \rightarrow \mathbb{R}$, so daß $h_2(z,sx) = s \cdot H_2(s,z,x)$ und $h_3(z,sx) = s \cdot H_3(s,z,x)$ für alle $(s,z,x) \in W$ gilt. Dann folgt $Dh(.,sx)(z) = s \cdot H(s,z,x)$ mit der stetigen Abbildung $H: W \ni (s,z,x) \mapsto h_1(z,sx) \cdot H_2(s,z,x) + H_3(s,z,x) \in \mathbb{R}$.

Bevor wir nun diesen Satz anwenden, erinnern wir noch an die Operatoren U_ϕ^α und W_ϕ^α aus Definition 3.3:

Definition 5.2

$$\text{Für } z > 0 \text{ sei: } U^z = U_{x_0^z}^{\alpha(z)} = DQ^{\alpha(z)}(x_0^z) \in L(C_0, C_0),$$

$$V^z = DV^{\alpha(z)}(1,.) (x_0^z) = D(x_1^{\alpha(z)})(x_0^z) \in L(C, C),$$

$$W^z = W_{x_0^z}^{\alpha(z)} = D(x_2^{\alpha(z)})(x_0^z) \in L(C, C).$$

Damit gilt:

Satz 5.1

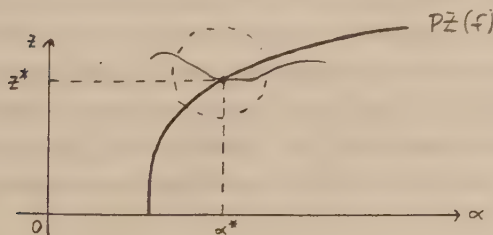
Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ ungerade, $f(0) = 0$, $f'(0) < 0$, $x f(x) < 0$ für $x \neq 0$.

Es gebe $z^* > 0$ für das gilt:

1. $\alpha'(z^*) \neq 0$,
2. $U^z = U^{z^*}$ besitzt den Eigenwert -1 und es ist $\dim \text{Kern}(U^* + 1_{C_0}) = 1$,
3. für ein (und damit alle) $\xi \in \text{Kern}(U^* + 1_{C_0})$, $\xi \neq 0$ gilt:
 $x = \bar{\xi}'(z^*) \in \text{Bild}(U^* + 1_{C_0})$ mit $\bar{\xi} = (\mathbb{R}^+ \ni z \mapsto U^z \xi \in C_0)$,
4. $U^* + 1_{C_0}$ ist Fredholmoperator mit Index 0.

Dann zweigt bei z^* ein differenzierbarer Ast symmetrischer periodischer Lösungen vom Primärzweig von f ab, d.h. es gibt ein offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$, offene Umgebungen $J \subseteq \mathbb{R}$, $U \in C_0$ von $\alpha^* = \alpha(z^*) \in \mathbb{R}$ und $x_0^* = x_0^{z^*} \in C_0$, sowie eine stetige Abbildung $(\bar{\alpha}, \bar{\varphi}): I \rightarrow J \times U$ so daß gilt:

- a. $\bar{\alpha}(0) = \alpha(z^*)$, $\bar{\varphi}(0) = x_0^z$, $(\bar{\alpha}, \bar{\varphi})$ ist in $I \setminus \{0\}$ stetig differenzierbar,
- b. für alle $s \in I$ ist die Fortsetzung $\bar{x}(.,s)$ von $x^{\bar{\alpha}(s)}(., \bar{\varphi}(s)) : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}$ symmetrische periodische Lösung von $(\bar{\alpha}(s)f)$.



c. für alle $s \in I \setminus \{0\}$ ist $(\bar{\alpha}(s), \bar{\varphi}(s)) \in \text{PZ}(f)$,

d. ist $(\beta, \varphi) \in J \times U$ und $x^\beta(\cdot, \varphi)$ symmetrische periodische Lösung von (βf) , so ist entweder $\beta = \alpha(z)$, $\varphi = x_0^z$ für ein $z > 0$, oder es gibt $s \in I$ mit $\beta = \bar{\alpha}(s)$, $\varphi = \bar{\varphi}(s)$.

Beweis :

Sei $g: \Lambda^* \ni (z, \varphi) \mapsto Q(\alpha(z), x_0^z + \varphi) + x_0^z + \varphi \in C_0$ wie in Lemma 5.2(2). Dann ist $\mathbb{R}^* \times \{0\} \subseteq \Lambda^*$, $g|_{\mathbb{R}^* \times \{0\}} = 0$. Sei weiter

$\sigma: \Lambda^* \ni (z, \varphi) \mapsto \tau(\alpha(z), x_0^z + \varphi) \in \mathbb{R}$; σ ist C^1 -Abbildung, $\sigma(z, 0) = 2$ und es gilt mit Lemma 3.1(1): $x^{\alpha(z)}(\sigma(z, \varphi), x_0^z + \varphi) = 0$, $\dot{x}^{\alpha(z)}(\sigma(z, \varphi), x_0^z + \varphi) \neq 0$ für alle $(z, \varphi) \in \Lambda^*$. Nach Definition von g und Q gilt weiter für $(z, \varphi) \in \Lambda^*$:

$$g(z, \varphi) = x_0^z + \varphi + T^{\alpha(z)}(\sigma(z, \varphi), x_0^z + \varphi),$$

und Differentiation nach z ergibt mit $w^z = \frac{d}{dz} x_0^z \in C_0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial z}(z, \varphi) &= [w^z + \alpha'(z) \frac{\partial}{\partial \alpha} T^{\alpha(z)}(\sigma(z, \varphi), x_0^z + \varphi) + \frac{\partial}{\partial \varphi} T^{\alpha(z)}(\sigma(z, \varphi), x_0^z + \varphi) w^z] + \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial t} T^{\alpha(z)}(\sigma(z, \varphi), x_0^z + \varphi) \right] \frac{\partial \sigma}{\partial z}(z, \varphi) = \\ &= h_3(z, \varphi) + \bar{h}_1(z, \varphi) \frac{\partial \sigma}{\partial z}(z, \varphi), \end{aligned}$$

wobei $\bar{h}_1, h_3: \Lambda^* \rightarrow C$ für $(z, \varphi) \in \Lambda^*$ definiert sind durch:

$$\begin{aligned} \bar{h}_1(z, \varphi) &= \frac{\partial}{\partial t} T^{\alpha(z)}(\sigma(z, \varphi), x_0^z + \varphi) = \dot{x}^{\alpha(z)}(\sigma(z, \varphi) + \cdot, x_0^z + \varphi)|_{[0,1]} \\ h_3(z, \varphi) &= w^z + \alpha'(z) \frac{\partial}{\partial \alpha} T^{\alpha(z)}(\sigma(z, \varphi), x_0^z + \varphi) + \frac{\partial}{\partial \varphi} T^{\alpha(z)}(\sigma(z, \varphi), x_0^z + \varphi) w^z. \end{aligned}$$

Dabei ist $\bar{h}_1$ stetig und h_3 stetig differenzierbar nach Lemma 2.1.

Sei $\Gamma = \{C \ni \varphi \mapsto \varphi(0) \in \mathbb{R}\} \in L(C, \mathbb{R})$, wegen $g(z, \varphi) \in C_0$ ist $\Gamma(g(z, \varphi)) = 0$ für alle $(z, \varphi) \in \Lambda^*$, und Differentiation nach z ergibt:

$$0 = \frac{\partial}{\partial z} \Gamma(g(z, \varphi)) = \Gamma\left(\frac{\partial g}{\partial z}(z, \varphi)\right) = \Gamma(h_3(z, \varphi)) + \Gamma(\bar{h}_1(z, \varphi)) \cdot \frac{\partial \sigma}{\partial z}(z, \varphi).$$

Dabei ist $\Gamma(\bar{h}_1(z, \varphi)) = \Gamma(\dot{x}^{\alpha(z)}(\sigma(z, \varphi) + \cdot, x_0^z + \varphi)|_{[0,1]}) = \dot{x}^{\alpha(z)}(\sigma(z, \varphi), x_0^z + \varphi) \neq 0$,

so daß mit $h_2 = \Gamma \circ h_3: \Lambda^* \rightarrow \mathbb{R}$ folgt: $\frac{\partial \sigma}{\partial z} = -\frac{1}{\Gamma \circ \bar{h}_1} h_2$, bzw.

$$\frac{\partial g}{\partial z}(z, \varphi) = h_3 - \frac{1}{\Gamma \circ \bar{h}_1} \cdot \bar{h}_1 \cdot h_2 = h_3 + h_1 \cdot h_2 \quad \text{mit} \quad h_1 = -\frac{1}{\Gamma \circ \bar{h}_1} \cdot \bar{h}_1.$$

Dabei sind h_3 und $h_2 = \Gamma \circ h_3$ stetig differenzierbar, h_1 ist stetig, und wegen $\sigma(z, 0) = 2$ ist $h_2(z, 0) = -\Gamma(\bar{h}_1(z, 0)) \frac{\partial \sigma}{\partial z}(z, 0) = 0$ für alle $z \in \mathbb{R}^*$.

Damit haben wir (für $h = g|_{\tilde{J} \times \tilde{U}}$, $\tilde{J} \times \tilde{U} \subseteq \Lambda^*$ geeignet mit $(z^*, 0) \in \tilde{J} \times \tilde{U}$) die Situation, die wir vor Definition 5.2 beschrieben haben, so daß die erste Bedingung des Satzes von der Verzweigung vom einfachen Eigenwert erfüllt ist.

Sei $\Lambda^* = Dg(z^*, \cdot)(0) = DQ^{\alpha(z^*)}(x_0^*) + 1_{C_0} = U^* + 1_{C_0}$; dann ist Λ^* Fredholmoperator mit Index 0. Wegen $\dim \text{Kern}(U^* + 1_{C_0}) = 1$ gibt es $\xi \in C_0$ mit $\text{Kern } \Lambda^* = \mathbb{R}\xi$ und $\xi \neq 0$. Sei $\tilde{\xi}(z) = Dg(z, \cdot)(0)\xi = U^z\xi + \xi$, dann ist $\tilde{\xi}$ differenzierbar (vgl.

obigen Zusatz) und $\frac{d}{dz}|_z \cdot \bar{z}(z) = z \in \text{Bild } A^*$.

Der Satz über die Verzweigung vom einfachen Eigenwert liefert also offene Umgebungen $\hat{J} \subseteq \mathbb{R}$ von z^* , $\hat{U} \subseteq C_0$ von $0 \in C_0$, $\hat{I} \subseteq \mathbb{R}$ von $0 \in \mathbb{R}$ und eine stetige Abbildung $(\bar{z}, \bar{\varphi}) : \hat{I} \longrightarrow \hat{J} \times \hat{U}$ mit :

- (i) $\bar{z}(0) = z^*$, $\bar{\varphi}(0) = 0$, $(\bar{z}, \bar{\varphi})$ ist in $\hat{I} \setminus \{0\}$ stetig differenzierbar und $\bar{\varphi}$ ist in 0 differenzierbar mit $\bar{\varphi}'(0) = \zeta \neq 0$, $\bar{\varphi}'(0) \in \text{Kern } A^*$,
- (ii) für alle $s \in \hat{I}$ ist $(\bar{z}(s), \bar{\varphi}(s)) \in A^*$ und $g(\bar{z}(s), \bar{\varphi}(s)) = 0$,
- (iii) für $s \in \hat{I} \setminus \{0\}$ ist $\bar{\varphi}(s) \neq 0$,
- (iv) $g^{-1}(\{0\}) \cap (\hat{J} \times \hat{U}) = (\hat{J} \times \{0\}) \cup (\bar{z}, \bar{\varphi})(\hat{I})$.

Sei nun $\hat{\alpha} = (\hat{I} \ni s \mapsto \alpha(\bar{z}(s)) \in \mathbb{R})$, $\hat{\varphi} = (\hat{I} \ni s \mapsto x_0^{\bar{z}(s)} + \bar{\varphi}(s) \in C_0)$; $\hat{\alpha}$ und $\hat{\varphi}$ sind stetig und stetig differenzierbar in $\hat{I} \setminus \{0\}$; es ist $\hat{\alpha}(0) = \alpha^*$, $\hat{\varphi}(0) = x_0^*$. Wir konstruieren als Nächstes I, J und U .

Wegen $\alpha'(z^*) \neq 0$ gibt es offene Intervalle $J' \subseteq \hat{J}$, $J'' \subseteq \mathbb{R}$ mit $z' \in J'$, $\alpha' \in J''$, so daß $J' \ni z \mapsto \alpha(z) \in J''$ homöomorph ist. Dies gilt somit auch für

$$H : J' \times C_0 \ni (z, \varphi) \mapsto (\alpha(z), x_0^z + \varphi) \in J'' \times C_0.$$

Wegen $(\alpha^*, x_0^*) = H(z^*, 0) \in H(J' \times \hat{U})$ gibt es also offene $J \subseteq J''$, $U \subseteq C_0$ mit $(\alpha^*, x_0^*) \in J \times U \subseteq H(J' \times \hat{U})$. Da $\Xi : C_0 \ni \varphi \mapsto \varphi(1) \in \mathbb{R}$ linear und stetig ist mit $\Xi(x_0^*) = z^* \in J'$, ist $\Xi^{-1}(J') \subseteq C_0$ offene Umgebung von x_0^* . Wir dürfen somit wegen $x_0^* \in U$ o.B. $U \subseteq \Xi^{-1}(J')$ annehmen, d.h. für alle $\varphi \in U$ ist $\varphi(1) \in J'$. Weiter ist $J''' = \alpha^{-1}(J) \cap J' \subseteq J'$ wegen $\alpha^* \in J$ offene Umgebung von z^* .

Sei nun $I = (\bar{z}, \bar{\varphi})^{-1}(J''' \times U) \subseteq \hat{I}$; da $(\bar{z}, \bar{\varphi}) : \hat{I} \longrightarrow \hat{J} \times C_0$ stetig ist, ist I offen, und wegen $(\bar{z}(0), \bar{\varphi}(0)) = (z^*, x_0^*) \in J''' \times U$ folgt $0 \in I$.

Sei $s \in I$, also $(\bar{z}(s), \bar{\varphi}(s)) \in J''' \times U$, d.h. $\bar{\varphi}(s) \in U$ und $\bar{z}(s) \in \alpha^{-1}(J)$, bzw. $\hat{\alpha}(s) = \alpha(\bar{z}(s)) \in J$. Damit ist :

$$(\bar{\alpha}, \bar{\varphi}) = (I \ni s \mapsto (\hat{\alpha}(s), \hat{\varphi}(s)) = (\alpha(\bar{z}(s)), x_0^{\bar{z}(s)} + \bar{\varphi}(s)) \in J \times U)$$

definiert, stetig und stetig differenzierbar in $I \setminus \{0\}$. Es gilt :

a. $\bar{\alpha}(0) = \alpha(\bar{z}(0)) = \alpha(z^*) = \alpha^*$, $\bar{\varphi}(0) = x_0^{\bar{z}(0)} + \bar{\varphi}(0) = x_0^*$ mit (i),

b. für $s \in I \setminus \{0\}$ gilt mit (ii) :

$$0 = g(\bar{z}(s), \bar{\varphi}(s)) = Q(\alpha(\bar{z}(s)), x_0^{\bar{z}(s)} + \bar{\varphi}(s)) = Q(\bar{\alpha}(s), \bar{\varphi}(s)) + \bar{\varphi}(s),$$

also $Q^{\bar{\alpha}(s)}(\bar{\varphi}(s)) = -\bar{\varphi}(s)$ und $\bar{x}(., s) = x^{\bar{\alpha}(s)}(., \bar{\varphi}(s))$ ist mit Lemma 3.3(2) symmetrische periodische Lösung von $(\bar{\alpha}(s)f)$.

c. Sei $s \in I$ und $(\bar{\alpha}(s), \bar{\varphi}(s)) \in PZ(f)$. Wir zeigen $s = 0$. Zunächst gibt es $z > 0$ mit $\bar{\alpha}(s) = \alpha(z)$, $\bar{\varphi}(s) = x_0^z$. Wegen $(\bar{\alpha}(s), \bar{\varphi}(s)) \in J \times U$ ist $\bar{\alpha}(s) = \alpha(\bar{z}(s)) \in J$ und $\bar{\varphi}(s) \in U$, also $z = x_0^z(1) = \bar{\varphi}(s)(1) \in J'$. Wegen $s \in I$ ist $\bar{z}(s) \in J''' \subseteq J'$,

also $\bar{z}(s)$, $z \in J'$, und da α auf J' injektiv ist, folgt $z = \bar{z}(s)$ wegen $\alpha(\bar{z}(s)) = \alpha(z)$. Damit gilt $x_0^z = \bar{\varphi}(s) = x_0^{\bar{z}(s)} + \bar{\varphi}(s) = x_0^z + \bar{\varphi}(s)$, d.h. es ist $\bar{\varphi}(s) = 0$ und mit $(\bar{z})$ folgt $s = 0$.

d. Sei $(\beta, \varphi) \in J \times U$ und $x^\beta(\cdot, \varphi)$ symmetrische periodische Lösung.

Wegen $J \times U \subseteq H(J' \times \hat{U})$ gibt es $z \in J' \subseteq \hat{J}$ und $\varphi \in \hat{U}$ mit $\beta = \alpha(z)$, $\varphi = x_0^z + \psi$.

Weiter ist $g(z, \varphi) = Q(\alpha(z), x_0^z + \psi) + x_0^z + \psi = Q^\beta(\varphi) + \varphi = 0$, also :

$$(z, \varphi) \in g^{-1}(\{0\}) \cap (\hat{J} \times \hat{U}) = (\hat{J} \times \{0\}) \cup (\bar{z}, \bar{\varphi})(\hat{I}),$$

d.h. es ist entweder $(z, \varphi) \in \hat{J} \times \{0\}$ oder $(z, \varphi) \in (\bar{z}, \bar{\varphi})(\hat{I})$.

Ist $(z, \varphi) \in \hat{J} \times \{0\}$, so ist $\varphi = 0$, also $\beta = \alpha(z)$, $\varphi = x_0^z$;

ist $(z, \varphi) \in (\bar{z}, \bar{\varphi})(\hat{I})$, so gibt es $s \in \hat{I}$ mit $z = \bar{z}(s)$, $\varphi = \bar{\varphi}(s)$ und es folgt :

$$\hat{\varphi}(s) = x_0^{\bar{z}(s)} + \bar{\varphi}(s) = x_0^z + \varphi = \varphi \in U, \quad \bar{z}(s) = z \in J', \quad \alpha(\bar{z}(s)) = \alpha(z) = \beta \in J,$$

also $\bar{z}(s) \in \alpha^{-1}(J) \cap J' = J''$. Damit ist $(\bar{z}(s), \hat{\varphi}(s)) \in J'' \times U$ bzw.

$$s \in (\bar{z}, \hat{\varphi})^{-1}(J'' \times U) = I \quad \text{und} \quad \beta = \alpha(\bar{z}(s)) = \bar{\alpha}(s), \quad \varphi = \hat{\varphi}(s) = \bar{\varphi}(s).$$

In Kapitel II werden wir die Voraussetzungen des Satzes umformulieren und vereinfachen. Dabei wird sich zeigen, daß -1 stets geometrisch einfach ist, falls -1 Eigenwert ist. Da U^* kompakt ist (vgl. etwa [18]), folgt, daß $U^* + 1_{C_0}$ stets Fredholmoperator mit Index 0 ist. Mit den Ergebnissen von Abschnitt 8 werden wir dies jedoch direkt nachrechnen.

Die bisherigen Überlegungen lassen sich natürlich auch auf

$$\tilde{g}(z, \varphi) = P^{\alpha(z)}(x_0^z + \varphi) - x_0^z - \varphi = 0$$

anwenden. Wegen $P^\alpha = Q^\alpha \circ Q^\alpha$ und $Q^\alpha(x_0^z) = -x_0^z$ ist (da $Q^{\alpha(z)}$ ungerade)

$$\begin{aligned} D\tilde{g}(z, \cdot)(0) &= DP^{\alpha(z)}(x_0^z) - 1_{C_0} = DQ^{\alpha(z)}(Q^{\alpha(z)}(x_0^z)) \circ DQ^{\alpha(z)}(x_0^z) - 1_{C_0} = \\ &= DQ^{\alpha(z)}(-x_0^z) \circ DQ^{\alpha(z)}(x_0^z) - 1_{C_0} = U^2 \circ U^2 - 1_{C_0} = (U^2 + 1_{C_0}) \circ (U^2 - 1_{C_0}). \end{aligned}$$

Sind die Voraussetzungen von Satz 5.1 erfüllt, und ist 1 nicht Eigenwert von U^* , so läßt sich der Satz über die Verzweigung vom einfachen Eigenwert auf $\tilde{g}$ anwenden. Da P nun C^1 -Abbildung ist, erhält man dann einen 2-mal stetig differenzierbaren abzweigenden Ast periodischer Lösungen. Wegen der Eindeutigkeit ist dies aber der Ast mit den symmetrischen Lösungen, die also in diesem Fall sogar auf einer C^2 -Kurve liegen (vgl. Corollar 14.1).

Walther hat in [18] für eine gewisse Klasse von Gleichungen (z.B. $f = -\sin$) einen Verzweigungspunkt nachgewiesen, für den jede Umgebung eine nichtsymmetrische periodische Lösung enthält (vgl. Theorem 6.2). Hieraus folgt, daß 1 Eigenwert von U^* ist, aber nicht -1.

Sind 1 und -1 Eigenwerte, so liegt eine kompliziertere Situation vor.

KAPITEL II : BEDINGUNGEN FÜR VERZWEIGUNG

In diesem Kapitel sei stets

$$f \in C^2(\mathbb{R}) \text{ ungerade, } f(0) = 0, f'(0) < 0, x f(x) < 0 \text{ für } x \neq 0.$$

Weiter seien $x(.,z), y(.,z), \alpha(z)$ wie im Satz von Kaplan und Yorke.

Wir setzen $x_1^z = x(t+.,z)|_{[0,1]} \in C$, speziell $x_0^z = x(.,z)|_{[0,1]} \in C_0$.

Mit den früheren Bezeichnungen gilt somit

$$x_1^z = x_1^{\alpha(z)}(x_0^z) \text{ für } t \geq 0 \text{ und } x(.,z)|_{\mathbb{R}_0^+} = x^{\alpha(z)}(.,x_0^z).$$

Wir wollen nun die Bedingungen von Satz 5.1 untersuchen und in eine einfachere Form bringen, bei der nur noch f und die Kaplan-Yorke-Lösungen auftreten. Als Ergebnis erhalten wir in Abschnitt 8 den "Verzweigungssatz für symmetrische periodische Lösungen". Verzweigungsprobleme für Funktionaldifferentialgleichungen wurden bisher nur von Walther [18] untersucht. Sein Ansatzpunkt besteht darin, das Spektrum des Operators U^z durch ein Randwertproblem eines Systems gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen zu beschreiben. Obwohl es nicht schwierig ist, dieses System herzuleiten (Lemma 6.1), hat Walther als erster daraus Folgerungen gezogen, in dem er die Abbildungsgrade der Poincaréabbildungen P^α für α nahe bei $\frac{1}{2}$ und für große Werte von α vergleicht, und dadurch auf die Existenz eines abzweigenden Astes nicht symmetrischer periodischer Lösungen schließt (Theorem 6.1 in [18]).

Wir untersuchen nun ebenfalls das obige Randwertproblem, wobei wir uns aber nur für den Eigenwert -1 interessieren. Da wir einen glatten abzweigenden Ast symmetrischer Lösungen finden wollen, müssen wir wegen Satz 5.1 Kern($U^z + 1_{C_0}$) und Bild($U^z + 1_{C_0}$), aber auch die Ableitung von $z \mapsto U^z$ möglichst genau beschreiben. Insofern ist unsere Situation komplizierter als bei Walther; eine wesentliche Erleichterung ist aber, daß -1 stets Eigenwert von W^z ist.

6. Die Variationsgleichung und die Fundamentallösung

Wir suchen also zunächst Bedingungen dafür, daß -1 Eigenwert von U^z ist. In Lemma 3.4(1) haben wir $U^z = U_{x_0^z}^{\alpha(z)}$ durch den Operator $W^z = W_{x_0^z}^{\alpha(z)}$ ausgedrückt, der sich aus dem Lösungsoperator der Variationsgleichung

$$\dot{u}(t) = \alpha(z) f'(x(t-1, z)) u(t-1)$$

ergibt. Wir wollen nun die Operatoren U^z, V^z, W^z beschreiben.

Da sich die Kaplan-Yorke-Lösungen $(x(.,z), y(.,z))$ aus dem gewöhnlichen Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = \alpha f(y), \quad \dot{y} = -\alpha f(x)$$

ergeben, können wir die Variationsgleichung in ein lineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen umschreiben. Wir erhalten:

Lemma 6.1

Sei $\xi \in C, z > 0, \alpha = \alpha(z)$. Dann gilt:

1. $V^z \xi = \xi(1) + \int_0^1 \alpha f'(x_0^z) \xi \, ds \in C, \cdot \in [0,1],$

$V^z \xi : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar,

2. Sei $\eta = V^z \xi$, dann ist

$W^z \xi = \eta(1) + \int_0^1 \alpha f'(y_0^z) \eta \, ds \in C, \cdot \in [0,1],$

$W^z \xi : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ ist stetig differenzierbar,

3. $U^z \xi = W^z \xi - \dot{x}_0^z \cdot \frac{W^z \xi(0)}{\dot{x}_0^z(0)} \in C_0$ für $\xi \in C_0$.

4. Sei $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; dann gilt $W^z \xi = \lambda \xi$ genau dann, wenn ξ differenzierbar ist, und es ein differenzierbares $\eta \in C$ gibt mit:

$$\dot{\eta} = \alpha f'(x_0^z) \xi, \quad \eta(0) = \xi(1)$$

$$\lambda \dot{\xi} = \alpha f'(y_0^z) \eta, \quad \lambda \xi(0) = \eta(1).$$

In diesem Fall ist $\eta = V^z \xi$.

5. Es ist $W^z \dot{x}_0^z = -\dot{x}_0^z$, d.h. -1 ist Eigenwert von W^z .

Beweis:

1. Es ist $V^z \xi = D(x_1^{\alpha(z)})(x_0^z) \xi = U_1^{\alpha(z)}(x_0^z, \xi)$ nach Definition 5.2 und Lemma 2.3.

Nach Definition 2.1 gilt $U_1^{\alpha(z)}(x_0^z, \xi) = U^{\alpha(z)}(1 + \cdot, x_0^z, \xi)|_{[0,1]}$; dabei ist $U^{\alpha(z)}(\cdot, x_0^z, \xi)$ die Lösung des linearen verzögerten Anfangswertproblems

$$\dot{u}(t) = \alpha(z) f'(x^{\alpha(z)}(t-1, x_0^z)) u(t-1), \quad t \geq 1, \quad u|_{[0,1]} = \xi.$$

Nun ist aber $x^{\alpha}(t-1, x_0^z) = x(t-1, z) (= y(t, z))$ für $t \geq 1$ und für $t \in [0,1]$ gilt:

$$V^z \xi(t) = U^{\alpha}(1+t, x_0^z, \xi) = U^{\alpha}(1, x_0^z, \xi) + \int_1^{1+t} \dot{U}^{\alpha}(s, x_0^z, \xi) \, ds =$$

$$= \xi(1) + \int_1^{1+t} \alpha f'(x(s-1, z)) U^{\alpha}(s-1, x_0^z, \xi) \, ds =$$

$$= \xi(1) + \int_0^t \alpha f'(x(s, z)) U^{\alpha}(s, x_0^z, \xi) \, ds =$$

$$= \xi(1) + \int_0^t \alpha f'(x_0^z(s)) \xi(s) \, ds.$$

2. Es ist mit Definition 5.2:

$$W^z \xi = W_{x_0^z}^\alpha \xi = [Dx_2^\alpha(x_0^z)] \xi = [D(x_1^\alpha \circ x_1^\alpha)(x_0^z)] \xi = [Dx_1^\alpha(x_1^\alpha(x_0^z))] \circ [Dx_1^\alpha(x_0^z)] \xi,$$

dabei gilt: $Dx_1^\alpha(x_0^z) \xi = V^z \xi = \eta, \quad x_1^\alpha(x_0^z) = x_1^z,$

also $W^z \xi = Dx_1^\alpha(x_1^z) \eta = U_1^\alpha(x_1^z, \eta) = U^\alpha(1+t, x_1^z, \eta)|_{[0,1]}.$

Für $t \in [0,1]$ ist wegen der Symmetrieeigenschaft von $x(.,z)$:

$$x^\alpha(t, x_1^z) = x_1^z(t) = x(1+t, z) = -x(1+t-2, z) = -x(t-1, z) = -y(t, z) = y_0^z(t),$$

und somit:

$$\begin{aligned} W^z \xi(t) &= U^\alpha(1+t, x_1^z, \eta) = U^\alpha(1, x_1^z, \eta) + \int_1^{1+t} \dot{U}^\alpha(s, x_1^z, \eta) ds = \\ &= \eta(1) + \int_1^{1+t} \alpha f'(x^\alpha(s-1, x_1^z)) U^\alpha(s, x_1^z, \eta) ds = \\ &= \eta(1) + \int_0^1 \alpha f'(x^\alpha(s, x_1^z)) U^\alpha(s, x_1^z, \eta) ds = \\ &= \eta(1) + \int_0^1 \alpha f'(-y_0^z(s)) \eta(s) ds. \end{aligned}$$

Da f ungerade, also f' gerade ist, folgt die Behauptung.

3. folgt mit Lemma 5.1 und $\dot{x}_0^z(0) = \dot{x}(0, z) = -\alpha f(z) \neq 0$ aus Lemma 3.4(1).

4. Sei $W^z \xi = \lambda \xi$ und $\eta = V^z \xi$; dann ist $\xi = \frac{1}{\lambda} W^z \xi$ differenzierbar und

$$\dot{\eta} = (V^z \xi)' = \alpha f'(x_0^z) \xi, \quad \eta(0) = \xi(1)$$

wegen 1.; mit 2. gilt: $\lambda \dot{\xi} = (W^z \xi)' = \alpha f'(y_0^z) \eta$, $\lambda \xi(0) = W^z \xi(0) = \eta(1)$.

Gibt es umgekehrt $\eta \in C$ mit

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \alpha f'(x_0^z) \xi, & \eta(0) &= \xi(1) \\ \lambda \dot{\xi} &= \alpha f'(y_0^z) \eta, & \lambda \xi(0) &= \eta(1), \end{aligned}$$

so folgt aus der 1. Zeile:

$$\eta = \eta(0) + \int_0^1 \dot{\eta} ds = \xi(1) + \int_0^1 \alpha f'(x_0^z) \xi ds = V^z \xi,$$

und die 2. Zeile liefert:

$$\lambda \xi = \lambda \xi(0) + \int_0^1 \lambda \dot{\xi} ds = \eta(1) + \int_0^1 \alpha f'(y_0^z) \eta ds = W^z \xi.$$

5. aus Lemma 3.4(2). ■

Wir haben damit die Untersuchung des Eigenwertproblems von W^z , und wegen Lemma 3.4(3,4) auch von U^z , zurückgeführt auf das lineare Randwertproblem

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \alpha f'(x_0^z) \xi, & \eta(0) &= \xi(1) \\ \lambda \dot{\xi} &= \alpha f'(y_0^z) \eta, & \lambda \xi(0) &= \eta(1). \end{aligned}$$

Für die weitere Untersuchung gehen wir analog vor wie Walther und definieren zunächst die Fundamentallösung dieses Systems:

Definition 6.1

Für $z > 0, \alpha = \alpha(z), \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei

$$A^\lambda(.,z) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha f'(x(.,z)) \\ \frac{\alpha}{\lambda} f'(y(.,z)) & 0 \end{pmatrix} : \mathbb{R} \longrightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2).$$

Weiter sei

$$S^\lambda(.,z) = \begin{pmatrix} p^\lambda(.,z) & u^\lambda(.,z) \\ q^\lambda(.,z) & v^\lambda(.,z) \end{pmatrix} : \mathbb{R} \longrightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$$

die (Fundamental-) Lösung von

$$\dot{S} = A^\lambda(.,z) S, \quad S(0) = 1_{\mathbb{R}^2}.$$

Bemerkungen :

1. Ist $\zeta_0, \eta_0 \in \mathbb{R}$, so ist natürlich $\begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = S^\lambda(.,z) \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \zeta_0 \end{pmatrix} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ die Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \alpha f'(x_0^z) \zeta, & \eta(0) &= \eta_0 \\ \lambda \dot{\zeta} &= \alpha f'(y_0^z) \eta, & \lambda \zeta(0) &= \zeta_0. \end{aligned}$$

2. Wegen $\text{Sp } A^\lambda(.,z) = 0$ gilt : $\det S^\lambda(.,z) = e^{\text{Sp } A^\lambda(.,z)} = 1$.

3. Da wir besonders den Eigenwert -1 untersuchen wollen, schreiben wir der Übersichtlichkeit halber $A(.,z), S(.,z), p(.,z), q(.,z), u(.,z), v(.,z)$ anstatt $A^{-1}(.,z), S^{-1}(.,z), p^{-1}(.,z), q^{-1}(.,z), u^{-1}(.,z), v^{-1}(.,z)$.

4. Wir wollen die Gleichungen für p, q, u, v nochmal explizit aufschreiben:

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \alpha f'(x^z) q, & p(0) &= 1 & \text{und} & \quad \dot{u} = \alpha f'(x^z) v, & u(0) &= 0 \\ \dot{q} &= -\alpha f'(y^z) p, & q(0) &= 0 & & \quad \dot{v} = -\alpha f'(y^z) u, & v(0) &= 1 \end{aligned}$$

Die Untersuchung für den Eigenwert -1 vereinfacht sich erheblich dadurch, daß wir die rechte Spalte von $S(.,z) = S^{-1}(.,z)$ direkt angeben können und die linke Spalte eine Symmetrieeigenschaft besitzt. Aus dieser Symmetrieeigenschaft folgt nämlich, daß -1 höchstens die geometrische Vielfachheit 1 besitzt. Dadurch wurde der Existenzbeweis für symmetrische Sekundärverzweigung erst möglich. Wir zeigen somit :

Lemma 6.2

Sei $z > 0, \alpha = \alpha(z)$. Dann gilt :

1. $u(.,z) = \frac{1}{\alpha f(z)} \dot{y}(.,z) = -\frac{f(x(.,z))}{f(z)}$
 $v(.,z) = -\frac{1}{\alpha f(z)} \dot{x}(.,z) = -\frac{f(y(.,z))}{f(z)},$
2. für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt :

$$\begin{aligned} p(1-t, z) &= q(t, z) + p(1, z) \cdot v(t, z) \\ q(1-t, z) &= p(t, z) + p(1, z) \cdot u(t, z). \end{aligned}$$

3. für $z > 0, t \in \mathbb{R}$ gilt :

$$\frac{\partial x}{\partial z}(t, z) = q(t, z) - \alpha'(z) f(z) \cdot t \cdot v(t, z)$$

$$\frac{\partial y}{\partial z}(t, z) = -p(t, z) + \alpha'(z) f(z) \cdot t \cdot u(t, z) .$$

4. es ist

$$S(1, z) = \begin{pmatrix} p(1, z) & u(1, z) \\ q(1, z) & v(1, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha'(z) f(z) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Beweis :

1. Sei $\eta = \dot{y}(\cdot, z)$, $\xi = -\dot{x}(\cdot, z)$. Dann ergibt Differentiation von

$$\dot{x}(\cdot, z) = \alpha f(y(\cdot, z))$$

$$\dot{y}(\cdot, z) = -\alpha f(x(\cdot, z))$$

nach t :

$$\dot{\eta} = \ddot{y}(\cdot, z) = \frac{d}{dt} [-\alpha f(x(\cdot, z))] = -\alpha f'(x(\cdot, z)) \dot{x}(\cdot, z) = \alpha f'(x(\cdot, z)) \xi ,$$

$$\dot{\xi} = -\ddot{x}(\cdot, z) = \frac{d}{dt} [-\alpha f(y(\cdot, z))] = -\alpha f'(y(\cdot, z)) \dot{y}(\cdot, z) = -\alpha f'(y(\cdot, z)) \eta ,$$

d.h. $\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}$ ist Lösung des linearen Systems für $\lambda = -1$ mit Anfangswert :

$$\begin{pmatrix} \eta(0) \\ \xi(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{y}(0, z) \\ -\dot{x}(0, z) \end{pmatrix} = -\alpha \begin{pmatrix} f(x(0, z)) \\ f(y(0, z)) \end{pmatrix} = -\alpha \begin{pmatrix} f(0) \\ f(-z) \end{pmatrix} = \alpha f(z) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

also gilt :

$$\begin{pmatrix} \dot{y}(\cdot, z) \\ -\dot{x}(\cdot, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = \alpha f(z) S(\cdot, z) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha f(z) \cdot \begin{pmatrix} u(\cdot, z) \\ v(\cdot, z) \end{pmatrix} .$$

2. Für $t \in \mathbb{R}$ gilt zunächst, da $x(\cdot, z)$ ungerade ist :

$$x(1-t, z) = -x(t-1, z) = -y(t, z)$$

$$y(1-t, z) = x(1-t-1, z) = x(-t, z) = -x(t, z) .$$

Sei $\eta = q(1-\cdot, z)$, $\xi = p(1-\cdot, z)$, dann gilt da f' gerade ist :

$$\dot{\eta}(t) = -\dot{q}(1-t, z) = \alpha f'(y(1-t, z)) p(1-t, z) = \alpha f'(x(t, z)) \xi(t) ,$$

$$\dot{\xi}(t) = -\dot{p}(1-t, z) = -\alpha f'(x(1-t, z)) q(1-t, z) = -\alpha f'(y(t, z)) \eta(t) .$$

Damit ist $\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}$ Lösung des linearen Systems, also

$$\begin{pmatrix} q(1-t, z) \\ p(1-t, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta(t) \\ \xi(t) \end{pmatrix} = S(t, z) \begin{pmatrix} \eta(0) \\ \xi(0) \end{pmatrix} = S(t, z) \begin{pmatrix} q(1, z) \\ p(1, z) \end{pmatrix}$$

oder :

$$q(1-t, z) = q(1, z) \cdot p(t, z) + p(1, z) \cdot u(t, z) ,$$

$$p(1-t, z) = q(1, z) \cdot q(t, z) + p(1, z) \cdot v(t, z) .$$

Damit muß nur noch $q(1, z) = 1$ gezeigt werden.

Wegen $\det S(\cdot, z) = 1$ ist zunächst $p(1, z) \cdot v(1, z) - q(1, z) \cdot u(1, z) = 1$.

Wegen 1. gilt

$$u(1, z) = -\frac{f(x(1, z))}{f(z)} = -\frac{f(z)}{f(z)} = -1 ,$$

$$v(1, z) = -\frac{f(y(1, z))}{f(z)} = -\frac{f(0)}{f(z)} = 0 ,$$

also ist $1 = p(1, z) \cdot 0 - q(1, z) \cdot (-1) = q(1, z)$.

3. Differentiation von

$$\dot{x}(t,z) = \alpha(z) f(y(t,z)) \quad , \quad x(0,z) = 0$$

$$\dot{y}(t,z) = -\alpha(z) f(x(t,z)) \quad , \quad y(0,z) = -z$$

nach z ergibt (wir lassen die Argumente weg) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x}{\partial z} &= \alpha' f(y) + \alpha f'(y) \cdot \frac{\partial y}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial x}{\partial z}(0,z) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial z} &= -\alpha' f(x) - \alpha f'(x) \cdot \frac{\partial x}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial z}(0,z) = -1 \end{aligned}$$

d.h. $\begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial z}(\cdot, \cdot, z) \\ -\frac{\partial x}{\partial z}(\cdot, \cdot, z) \end{pmatrix}$ ist Lösung des linearen Anfangswertproblems

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha f'(x) \\ -\alpha f'(y) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \end{pmatrix} - \alpha'(z) \begin{pmatrix} f(x) \\ f(y) \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \eta(0) \\ \zeta(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Wir zeigen, daß auch

$$\eta(t) = -p(t,z) + \alpha'(z) f(z) \cdot t \cdot u(t,z)$$

$$\zeta(t) = -q(t,z) + \alpha'(z) f(z) \cdot t \cdot v(t,z)$$

Lösung dieses Systems ist, woraus die Behauptung folgt.

Für die Anfangswerte erhalten wir :

$$\eta(0) = -p(0,z) + \alpha'(z) f(z) \cdot 0 \cdot u(0,z) = -p(0,z) = -1,$$

$$\zeta(0) = -q(0,z) + \alpha'(z) f(z) \cdot 0 \cdot v(0,z) = -q(0,z) = 0.$$

Weiter gilt mit

$$f(z) u(t,z) = -f(x(t,z))$$

$$f(z) v(t,z) = -f(y(t,z))$$

aus 1. :

$$\begin{aligned} \dot{\eta}(t) &= -\dot{p}(t,z) + \alpha'(z) f(z) [u(t,z) + t \dot{u}(t,z)] = \\ &= -\alpha f'(x(t,z)) \cdot q(t,z) + \alpha'(z) f(z) \cdot u(t,z) + \\ &\quad + \alpha'(z) f(z) \cdot t \cdot \alpha f'(x(t,z)) \cdot v(t,z) \\ &= \alpha f'(x(t,z)) [-q(t,z) + \alpha'(z) f(z) \cdot t \cdot v(t,z)] + \alpha'(z) f(z) \cdot u(t,z) = \\ &= \alpha f'(x(t,z)) \zeta(t) - \alpha'(z) f(x(t,z)) \quad , \\ \dot{\zeta}(t) &= -\dot{q}(t,z) + \alpha'(z) f(z) [v(t,z) + t \dot{v}(t,z)] = \\ &= \alpha f'(y(t,z)) \cdot p(t,z) + \alpha'(z) f(z) \cdot v(t,z) + \\ &\quad + \alpha'(z) f(z) \cdot t \cdot (-\alpha f'(y(t,z)) \cdot u(t,z)) = \\ &= \alpha f'(y(t,z)) [p(t,z) - \alpha'(z) f(z) \cdot t \cdot u(t,z)] + \alpha'(z) f(z) \cdot v(t,z) = \\ &= -\alpha f'(y(t,z)) \eta(t) - \alpha'(z) f(y(t,z)) . \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{pmatrix} \dot{\eta} \\ \dot{\zeta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha f'(x) \\ -\alpha f'(y) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \end{pmatrix} - \alpha'(z) \begin{pmatrix} f(x) \\ f(y) \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \eta(0) \\ \zeta(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $\eta = \frac{\partial y}{\partial z} (., z)$, $\xi = -\frac{\partial x}{\partial z} (., z)$.

4. Es muß nur noch $p(1, z) = -\alpha'(z) f(z)$ gezeigt werden.

Wegen $y(1, z) = 0$ und $u(1, z) = -1$ ist :

$$0 = \frac{\partial y}{\partial z} (1, z) = -p(1, z) + \alpha'(z) f(z) \cdot 1 \cdot u(1, z) = -p(1, z) - \alpha'(z) f(z),$$

also ist $p(1, z) = -\alpha'(z) f(z)$.

7. Der Eigenwert -1

Seien $f, x(.,z), y(.,z), S(.,z), p(.,z), \dots, v(.,z)$ wie im letzten Abschnitt.

Sei $p_1^z = p(1+.,z)|_{[0,1]} \in C$ usw., speziell $p_0^z = p(.,z)|_{[0,1]} \in C, \dots$

Wir wollen nun Bedingungen dafür finden, daß -1 Eigenwert von U^z ist. Da wir in Lemma 6.1(3) U^z durch den Operator W^z beschreiben, untersuchen wir zunächst Kern $(W^z + 1_C)$ (vgl. Corollary 5.1 in [18]):

Lemma 7.1

Sei $z > 0$. Für alle $\xi \in \text{Kern}(W^z + 1_C)$ gilt: $\alpha'(z)\xi(1) = 0$.

Das bedeutet:

Ist $\alpha'(z) \neq 0$, so ist $\text{Kern}(W^z + 1_C) = \mathbb{R} \dot{x}_0^z$;

ist $\alpha'(z) = 0$, so ist $\text{Kern}(W^z + 1_C) = \mathbb{R} \dot{x}_0^z \oplus \mathbb{R} q_\alpha^z$ und

$q_0^z \in \text{Kern}(U^z + 1_{C_0})$.

Beweis:

Sei $\xi \in \text{Kern}(W^z + 1_C)$, also $W^z \xi = -\xi$. Mit Lemma 6.1 und $\alpha = \alpha(z)$ gilt dann:

$$\eta = V^z \xi = \xi(1) + \int_0^1 \alpha f^*(x_\alpha^z) \xi \, ds$$

und:

$$\dot{\eta} = \alpha f^*(x_\alpha^z) \xi, \quad \eta(0) = \xi(1)$$

$$\dot{\xi} = -\alpha f^*(y_\alpha^z) \eta, \quad \xi(0) = -\eta(1).$$

Mit der Fundamentalmatrix $S(.,z)$ ist $\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = S(.,z) \begin{pmatrix} \eta(0) \\ \xi(0) \end{pmatrix}$ und Lemma 6.2(4) ergibt:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -\xi(0) \\ \eta(0) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \eta(1) \\ \xi(1) \end{pmatrix} = S(1,z) \begin{pmatrix} \eta(0) \\ \xi(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha'(z) f(z) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta(0) \\ \xi(0) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\alpha'(z) f(z) \eta(0) - \xi(0) \\ \eta(0) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

d.h. es ist $\xi(0) = \alpha'(z) f(z) \eta(0) + \xi(0)$ bzw. $\alpha'(z) f(z) \eta(0) = 0$.

Wegen $f(z) \neq 0$, $\eta(0) = \xi(1)$ folgt $\alpha'(z) \xi(1) = 0$.

Sei $\alpha'(z) \neq 0$; dann ist $\eta(0) = \xi(1) = 0$ und

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = S(.,z) \begin{pmatrix} \eta(0) \\ \xi(0) \end{pmatrix} = S(.,z) \begin{pmatrix} 0 \\ \xi(0) \end{pmatrix} = \xi(0) \cdot \begin{pmatrix} u_0^z \\ v_0^z \end{pmatrix},$$

also $\xi = \xi(0) v_0^z = \xi(0) \cdot \left(-\frac{1}{\alpha f(z)}\right) \cdot \dot{x}_0^z \in \mathbb{R} \dot{x}_0^z$.

Wegen Lemma 6.1(5) ist $\dot{x}_0^z \in \text{Kern}(W^z + 1_C)$, also gilt für $\alpha'(z) \neq 0$:

$$\text{Kern}(W^z + 1_C) = \mathbb{R} \dot{x}_0^z.$$

Sei $\alpha'(z) = 0$; dann folgt aus

$$\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} = S(.,z) \begin{pmatrix} \eta(0) \\ \xi(0) \end{pmatrix}:$$

$$\xi = \eta(0) q_0^z + \zeta(0) v_0^z \in \mathbb{R} q_0^z \oplus \mathbb{R} \dot{x}_0^z,$$

d.h. es ist $\text{Kern}(W^z + 1_C) \subseteq \mathbb{R} \dot{x}_0^z \oplus \mathbb{R} q_0^z$.

Nach Definition von p_0^z , q_0^z und Lemma 6.2(4) gilt:

$$\dot{p}_0^z = \alpha f'(x_0^z) q_0^z$$

$$-\dot{q}_0^z = \alpha f'(y_0^z) p_0^z$$

$$\text{und } p_0^z(0) = p(0, z) = 1 = q(1, z) = q_0^z(1),$$

$$-q_0^z(0) = 0 = -\alpha'(z) f(z) = p(1, z) = p_0^z(1),$$

Mit Lemma 6.1(4) bedeutet dies aber $W^z q_0^z = -q_0^z$ bzw. $q_0^z \in \text{Kern}(W^z + 1_C)$.

Wegen $\dot{x}_0^z \in \text{Kern}(W^z + 1_C)$ folgt also

$$\text{Kern}(W^z + 1_C) = \mathbb{R} \dot{x}_0^z \oplus \mathbb{R} q_0^z,$$

falls $\alpha'(z) = 0$. Aus $W^z q_0^z(0) = -q_0^z(0) = 0$ und Lemma 6.1(3) erhält man weiter:

$$U^z q_0^z = W^z q_0^z - \dot{x}_0^z \frac{W^z q_0^z(0)}{\dot{x}_0^z(0)} = -q_0^z - \dot{x}_0^z \cdot 0 = -q_0^z,$$

also $q_0^z \in \text{Kern}(U^z + 1_{C_0})$. ■

Wir haben bisher in Lemma 6.1(4) nur das Eigenwertproblem $W^z \xi = \lambda \xi$ in ein Randwertproblem für lineare Differentialgleichungssysteme umformuliert. Wir wollen nun dasselbe für U^z tun, wobei wir nur den Eigenwert $\lambda = -1$ betrachten.

Lemma 7.2

Für $z > 0$ sei $N^z \subseteq C \times C \times \mathbb{R}$ die Menge der Lösungen $\{(\eta, \xi, \mu)\}$ des Randwertproblems

$$(*) \quad \begin{aligned} \dot{\eta} &= \alpha(z) f'(x_0^z) \xi, & \eta(0) &= \xi(1) \\ \dot{\xi} &= -\alpha(z) f'(y_0^z) \eta + \mu \ddot{x}_0^z, & \xi(0) &= 0 \end{aligned} \quad , \quad \eta(1) = \mu \dot{x}_0^z(0)$$

Sei weiter

$$\Phi^z: C_0 \ni \xi \longmapsto (V^z \xi, \xi, \frac{V^z \xi(1)}{\dot{x}(0, z)}) \in C \times C \times \mathbb{R},$$

$$\Theta^z: C \times C \times \mathbb{R} \ni (\eta, \xi, \mu) \longmapsto \xi \in C.$$

Dann gilt:

1. N^z ist linearer Unterraum von $C \times C \times \mathbb{R}$.

2. Φ^z und Θ^z induzieren die Vektorraumisomorphismen

$$\hat{\Phi}^z: \text{Kern}(U^z + 1_{C_0}) \ni \xi \longmapsto \Phi^z(\xi) \in N^z$$

$$\hat{\Theta}^z: N^z \ni (\eta, \xi, \mu) \longmapsto \xi \in \text{Kern}(U^z + 1_{C_0}),$$

und es ist $(\hat{\Phi}^z)^{-1} = \hat{\Theta}^z$.

3. $\dim \text{Kern}(U^z + 1_{C_0}) = \dim N^z$.

Beweis:

1. Die Gleichungen für η, ξ, μ sind linear in η, ξ, μ , also ist N^z linea-

rer Unterraum.

2. Sei $\xi \in \text{Kern}(U^2 + 1_{C_0})$ und $\eta = V^2 \xi$, $\mu = \frac{\eta(1)}{\dot{x}(0,z)}$, also

$$\Phi^2(\xi) = (\eta, \xi, \mu) \in C \times C \times \mathbb{R} \quad \text{und} \quad U^2 \xi = -\xi.$$

Wir zeigen: $\Phi^2(\xi) \in N^2$, d.h. (η, ξ, μ) ist Lösung von (*).

Aus $\eta = V^2 \xi$ folgt zunächst mit Lemma 6.1(1) und $\alpha = \alpha(z)$

$$\dot{\eta} = \alpha f'(x_0^2) \xi, \quad \eta(0) = \xi(1);$$

dies ist die erste Zeile von (*). Nach Definition von μ gilt

$$\eta(1) = \mu \dot{x}(0,z) = \mu \dot{x}_0^2(0). \quad \text{Es bleibt zu zeigen:}$$

$$\dot{\xi} = -\alpha f'(y_0^2) \eta + \mu \ddot{x}_0^2, \quad \xi(0) = 0.$$

Wegen $\xi \in \text{Kern}(U^2 + 1_{C_0}) \subseteq C_0$ ist $\xi(0) = 0$. Weiter ist mit Lemma 6.1:

$$W^2 \xi = \eta(1) + \int_0^1 \alpha f'(y_0^2) \eta \, ds, \quad W^2 \xi(0) = \eta(1),$$

und:

$$\xi = -U^2 \xi = -W^2 \xi + \dot{x}_0^2 \frac{W^2 \xi(0)}{\dot{x}(0,z)} = -W^2 \xi + \dot{x}_0^2 \frac{\eta(1)}{\dot{x}(0,z)} = -W^2 \xi + \dot{x}_0^2 \mu,$$

und Differentiation ergibt die gesuchte Gleichung.

Somit ist $\hat{\Phi}^2: \text{Kern}(U^2 + 1_{C_0}) \rightarrow N^2$ definiert.

Sei nun $(\eta, \xi, \mu) \in N^2$, d.h. es gelte (*) für (η, ξ, μ) . Dann bedeutet die erste Zeile von (*): $\eta = V^2 \xi$. Wegen $\xi(0) = 0$ ist $\xi \in C_0$, und es gilt:

$$W^2 \xi = \eta(1) + \int_0^1 \alpha f'(y_0^2) \eta \, ds, \quad W^2 \xi(0) = \eta(1) = V^2 \xi(1),$$

also $U^2 \xi = W^2 \xi - \mu \dot{x}_0^2$ wegen $\frac{W^2 \xi(0)}{\dot{x}(0,z)} = \frac{\eta(1)}{\dot{x}(0,z)} = \mu$.

Sei $\zeta = U^2 \xi + \xi$, dann ist $\zeta \in C_0$, also $\zeta(0) = 0$ und:

$$\dot{\zeta} = (U^2 \xi)' + \dot{\xi} = (W^2 \xi)' - \mu \ddot{x}_0^2 + \dot{\xi} = \alpha f'(y_0^2) \eta - \mu \ddot{x}_0^2 + \dot{\xi} = 0,$$

d.h. es ist $\zeta = 0$ und somit $\theta^2(\eta, \xi, \mu) = \xi \in \text{Kern}(U^2 + 1_{C_0})$.

Damit ist $\hat{\theta}^2: N^2 \rightarrow \text{Kern}(U^2 + 1_{C_0})$ definiert, und es gilt

$$\hat{\Phi}^2(\hat{\theta}^2(\eta, \xi, \mu)) = \hat{\Phi}^2(\xi) = (V^2 \xi, \xi, \frac{V^2 \xi(1)}{\dot{x}(0,z)}) = (\eta, \xi, \mu).$$

Für $\xi \in \text{Kern}(U^2 + 1_{C_0})$ folgt:

$$\hat{\theta}^2(\hat{\Phi}^2(\xi)) = \hat{\theta}^2(V^2 \xi, \xi, \frac{V^2 \xi(1)}{\dot{x}(0,z)}) = \xi.$$

Natürlich sind $\hat{\theta}^2, \hat{\Phi}^2$ linear, also Vektorraumisomorphismen.

3. Damit sind N^2 und $\text{Kern}(U^2 + 1_{C_0})$ isomorphe Vektorräume, haben also dieselbe Dimension.

Wir wollen Bedingungen für $\dim \text{Kern}(U^2 + 1_{C_0}) = 1$ finden und müssen dazu das System (*) lösen. Dies ist aber mit der Fundamentalmatrix leicht möglich:

Lemma 7.3

Sei $z > 0$, $\alpha = \alpha(z)$, $(\eta_0, \xi_0, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und (η, ξ) die Lösung von

$$\dot{\eta} = \alpha f'(x(.,z)) \xi \quad , \quad \eta(0) = \eta_0$$

$$\dot{\xi} = -\alpha f'(y(.,z)) \eta + \mu \ddot{x}(.,z) \quad , \quad \xi(0) = \xi_0$$

Dann gilt:

$$1. \quad \eta = p(.,z) \cdot [\eta_0 - \mu \int_0^1 u(s,z) \ddot{x}(s,z) ds] +$$

$$+ u(.,z) \cdot [\xi_0 + \mu \int_0^1 p(s,z) \ddot{x}(s,z) ds]$$

$$\xi = q(.,z) \cdot [\eta_0 - \mu \int_0^1 u(s,z) \ddot{x}(s,z) ds] +$$

$$+ v(.,z) \cdot [\xi_0 + \mu \int_0^1 p(s,z) \ddot{x}(s,z) ds]$$

$$2. \quad \eta(1) = p(1,z) \eta_0 - \xi_0 - \mu \left[p(1,z) \int_0^1 u(s,z) \ddot{x}(s,z) ds + \int_0^1 p(s,z) \ddot{x}(s,z) ds \right]$$

$$\xi(1) = \eta_0 - \mu \int_0^1 u(s,z) \ddot{x}(s,z) ds.$$

Beweis:

$$1. \quad \text{Sei } a = \eta_0 - \mu \int_0^1 u(s,z) \ddot{x}(s,z) ds \quad , \quad a(0) = \eta_0$$

$$b = \xi_0 + \mu \int_0^1 p(s,z) \ddot{x}(s,z) ds \quad , \quad b(0) = \xi_0$$

$$\text{und } \bar{\eta} = p(.,z) \cdot a + u(.,z) \cdot b, \quad \bar{\xi} = q(.,z) \cdot a + v(.,z) \cdot b.$$

Wir zeigen, daß $(\bar{\eta}, \bar{\xi})$ das Gleichungssystem löst, woraus $\bar{\eta} = \eta, \bar{\xi} = \xi$ folgt.

$$\text{Zunächst ist } \bar{\eta}(0) = p(0,z) \cdot a(0) + u(0,z) \cdot b(0) = 1 \cdot \eta_0 + 0 \cdot \xi_0 = \eta_0,$$

$$\bar{\xi}(0) = q(0,z) \cdot a(0) + v(0,z) \cdot b(0) = 0 \cdot \eta_0 + 1 \cdot \xi_0 = \xi_0,$$

d.h. die Anfangswerte stimmen überein.

Mit $\dot{a} = -\mu u(.,z) \ddot{x}(.,z)$, $\dot{b} = \mu p(.,z) \ddot{x}(.,z)$ folgt (wir schreiben kurz $p, \dots$

für $p(.,z), \dots$):

$$\dot{\bar{\eta}} = \dot{p}a + p\dot{a} + \dot{u}b + u\dot{b} = \dot{p}a + \dot{u}b + \mu \cdot (-pu\ddot{x} + pu\ddot{x}) =$$

$$= \alpha f'(x) qa + \alpha f'(x) vb = \alpha f'(x) [qa + vb] =$$

$$= \alpha f'(x) \bar{\xi},$$

$$\dot{\bar{\xi}} = \dot{q}a + q\dot{a} + \dot{v}b + v\dot{b} = \dot{q}a + \dot{v}b + \mu \cdot (-qu\ddot{x} + vp\ddot{x}) =$$

$$= -\alpha f'(y) pa - \alpha f'(y) ub + \mu \ddot{x} (pv - qu) = -\alpha f'(y) [pa + ub] + \mu \ddot{x} =$$

$$= -\alpha f'(y) \bar{\eta} + \mu \ddot{x};$$

wobei $pv - qu = \det S = 1$ benutzt wurde.

Damit gilt:

$$\dot{\bar{\eta}} = \alpha f'(x(.,z)) \bar{\xi}$$

$$\dot{\bar{\xi}} = -\alpha f'(y(.,z)) \bar{\eta} + \mu \ddot{x}(.,z).$$

2. Mit Lemma 6.2(4) ist $q(1,z) = 1$, $u(1,z) = -1$, $v(1,z) = 0$, also

$$\eta(1) = p(1,z) a(1) + u(1,z) b(1) =$$

$$= p(1,z) \cdot [\eta_0 - \mu \int_0^1 u(s,z) \tilde{x}(s,z) ds] - 1 \cdot [\zeta_0 + \mu \int_0^1 p(s,z) \tilde{x}(s,z) ds]$$

$$= p(1,z) \cdot \eta_0 - \zeta_0 - \mu \cdot [p(1,z) \cdot \int_0^1 u(s,z) \tilde{x}(s,z) ds + \int_0^1 p(s,z) \tilde{x}(s,z) ds],$$

$$\xi(1) = q(1,z) a(1) + v(1,z) b(1) = 1 \cdot a(1) + 0 \cdot b(1) = \eta_0 - \mu \int_0^1 u(s,z) \tilde{x}(s,z) ds. \quad \blacksquare$$

Wir werden nun mit den beiden letzten Lemmata N^2 beschreiben. Dies ist jedoch nur möglich, weil wir das Integral $\int_0^1 p(s,z) \tilde{x}(s,z) ds$ berechnen können:

Lemma 7.4

Sei $z > 0$ und $\alpha'(z) \cdot \int_0^1 u(s,z) \tilde{x}(s,z) ds = 0$, dann gilt mit $\alpha = \alpha(z)$:

$$\int_0^1 p(s,z) \tilde{x}(s,z) ds = -\frac{1}{\alpha} \dot{\tilde{x}}(0,z) = \frac{1}{\alpha} \alpha f(z) \neq 0.$$

Beweis :

Zunächst gilt $p(s,z) \ddot{x}(s,z) + \dot{q}(s,z) \dot{y}(s,z) = 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$, denn mit $\dot{q} = -\alpha f'(y)p$ und $\dot{\tilde{x}} = \alpha f(y)$ folgt:

$$p \ddot{x} + \dot{q} \dot{y} = p \ddot{x} - \alpha f'(y) \dot{y} p = p \cdot [\ddot{x} - \alpha f'(y) \dot{y}] = p \cdot [\dot{\tilde{x}} - \alpha f(y)]' = 0.$$

Wegen $\alpha'(z) \int_0^1 u(s,z) \tilde{x}(s,z) ds = 0$ und $p(1,z) = -\alpha'(z) f(z)$ aus

Lemma 6.2(4) ist dann auch $p(1,z) \cdot \int_0^1 u(s,z) \tilde{x}(s,z) ds = 0$.

Für die Hilfsfunktion

$$\begin{aligned} \gamma(t) = & \left(\int_0^{1-t} + \int_t^1 \right) \tilde{x}(s,z) p(s,z) ds + p(1,z) \int_t^1 u(s,z) \tilde{x}(s,z) ds + \\ & + q(1-t,z) \dot{y}(1-t,z) \end{aligned}$$

gilt $\gamma(1) = 0$ wegen $q(0,z) = 0$.

Aus dem Satz von Kaplan und Yorke folgt für $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \gamma(t,z) = x(t-1,z) & \Rightarrow \dot{\gamma}(t,z) = \dot{x}(t-1,z), \quad \ddot{\gamma}(t,z) = \ddot{x}(t-1,z) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \ddot{\gamma}(1-t,z) = \ddot{x}(1-t-1,z) = \ddot{x}(-t,z) = -\ddot{\tilde{x}}(t,z), \end{aligned}$$

und mit $q(1-t,z) = p(t,z) + p(1,z) u(t,z)$ aus Lemma 6.2(2) folgt:

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}(t) = & -\ddot{\tilde{x}}(1-t,z) p(1-t,z) - \ddot{\tilde{x}}(t,z) p(t,z) - p(1,z) u(t,z) \ddot{\tilde{x}}(t,z) - \\ & - \dot{q}(1-t,z) \dot{\gamma}(1-t,z) - q(1-t,z) \ddot{\gamma}(1-t,z) = \\ = & -\ddot{\tilde{x}}(1-t,z) p(1-t,z) - [p(t,z) + p(1,z) u(t,z)] \ddot{\tilde{x}}(t,z) - \\ & - \dot{q}(1-t,z) \dot{\gamma}(1-t,z) + q(1-t,z) \ddot{\tilde{x}}(t,z) = \\ = & \ddot{\tilde{x}}(t,z) [q(1-t,z) - p(1,z) u(t,z) - p(t,z)] - \end{aligned}$$

$$- [\ddot{x}(\cdot, z) p(\cdot, z) + \dot{q}(\cdot, z) \dot{y}(\cdot, z)](1-t) =$$

$$= 0,$$

da beide eckigen Klammern verschwinden.

Damit ist $\gamma(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und für $t=0$ folgt:

$$0 = \gamma(0) = \left(\int_0^1 + \int_0^1 \right) \ddot{x}(s, z) p(s, z) ds + p(1, z) \cdot \int_0^1 u(s, z) \ddot{x}(s, z) ds +$$

$$+ q(1, z) \dot{y}(1, z) =$$

$$= 2 \cdot \int_0^1 p(s, z) \ddot{x}(s, z) ds + 0 + 1 \cdot \dot{x}(0, z),$$

denn es ist $q(1, z) = 1$ nach Lemma 6.2(4) und $\dot{y}(1, z) = \dot{x}(0, z)$. ■

Wir wollen nun untersuchen, wie wir η_0, ξ_0, μ in Lemma 7.3 wählen müssen, um auch eine Lösung des Systems (*) von Lemma 7.2 zu erhalten.

Das Ergebnis lautet:

Lemma 7.5

Sei $z > 0$ und $(\eta_0, \xi_0, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und η, ξ wie in Lemma 7.3.

Dann ist äquivalent:

$$(i) \quad \dot{\eta} = \alpha(z) f'(x_0^2) \xi, \quad \eta(0) = \xi(1), \quad \eta(1) = \mu \dot{x}(0, z)$$

$$\dot{\xi} = -\alpha(z) f'(y_0^2) \eta + \mu \ddot{x}_0^2, \quad \xi(0) = 0$$

$$\xi \neq 0$$

$$(ii) \quad \xi_0 = 0, \quad \eta_0 \neq 0, \quad \mu = 2 \frac{\alpha'(z)}{\alpha(z)} \eta_0, \quad \alpha'(z) \int_0^1 u(s, z) \ddot{x}(s, z) ds = 0.$$

Beweis:

(i) $\Rightarrow$ (ii): Mit Lemma 7.3(2) folgt:

$$\xi_0 = \xi(0) = 0 \quad \text{und} \quad \eta_0 = \eta(0) = \xi(1) = \eta_0 - \mu \cdot \int_0^1 u(s, z) \ddot{x}(s, z) ds,$$

d.h. es ist:

$$\mu \cdot \int_0^1 u(s, z) \ddot{x}(s, z) ds = 0.$$

Weiter folgt:

$$\mu \dot{x}(0, z) = \eta(1) = p(1, z) \eta_0 - \xi_0 -$$

$$- \mu \cdot \left[p(1, z) \int_0^1 u(s, z) \ddot{x}(s, z) ds + \int_0^1 p(s, z) \ddot{x}(s, z) ds \right]$$

$$= p(1, z) \eta_0 - \mu \int_0^1 p(s, z) \ddot{x}(s, z) ds,$$

also:

$$p(1, z) \eta_0 = \mu \left[\dot{x}(0, z) + \int_0^1 p(s, z) \ddot{x}(s, z) ds \right]$$

1. Fall: $\mu = 0$:

Dann ist mit Lemma 6.2(4) $p(1, z) \eta_0 = 0 = -\alpha'(z) f(z) \eta_0$, d.h. es ist $\alpha'(z) \eta_0 = 0$ und $\mu = 0 = 2 \frac{\alpha'(z)}{\alpha(z)} \eta_0$.

2. Fall: $\mu \neq 0$:

Dann ist $\int_0^1 u(s,z) \ddot{x}(s,z) ds = 0$, also ist auch

$$\alpha'(z) \int_0^1 u(s,z) \ddot{x}(s,z) ds = 0.$$

Mit Lemma 7.4 ist also $\int_0^1 p(s,z) \ddot{x}(s,z) ds = -\frac{1}{2} \dot{x}(0,z)$ und somit:

$$p(1,z) \eta_0 = \mu \cdot \frac{1}{2} \dot{x}(0,z) \text{ bzw. } \mu = 2 \frac{p(1,z)}{\dot{x}(0,z)} \eta_0 = 2 \frac{\alpha'(z)}{\alpha(z)} \eta_0 \text{ mit Lemma 6.2(4).}$$

Damit muß nur noch $\eta_0 \neq 0$ gezeigt werden, denn dann folgt im 1. Fall $\alpha'(z) = 0$, also ebenfalls $\alpha'(z) \int_0^1 u(s,z) \ddot{x}(s,z) ds = 0$.

Aus $\eta_0 = 0$ folgt aber $\mu = 0$ und aus (i) folgt wegen $\eta(0) = \xi(0) = 0$: $\xi = \eta = 0$, in Widerspruch zu $\xi \neq 0$.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Es gilt:

$$\mu \int_0^1 u(s,z) \ddot{x}(s,z) ds = 2 \frac{\eta_0}{\alpha(z)} \left[\alpha'(z) \int_0^1 u(s,z) \ddot{x}(s,z) ds \right] = 0,$$

und mit Lemma 7.3(2) und 7.4 folgt:

$$\xi(0) = \xi_0 = 0,$$

$$\xi(1) = \eta_0 - \mu \int_0^1 u(s,z) \ddot{x}(s,z) ds = \eta(0),$$

$$\begin{aligned} \eta(1) &= p(1,z) \eta_0 - \xi_0 - \\ &\quad - \mu \left[p(1,z) \int_0^1 u(s,z) \ddot{x}(s,z) ds + \int_0^1 p(s,z) \ddot{x}(s,z) ds \right] = \\ &= p(1,z) \eta_0 - \mu \int_0^1 p(s,z) \ddot{x}(s,z) ds = p(1,z) \eta_0 + \frac{1}{2} \mu \dot{x}(0,z) = \\ &= -\alpha'(z) f(z) \eta_0 + \frac{1}{2} \mu \dot{x}(0,z) = -\alpha(z) f(z) \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \frac{\alpha'(z)}{\alpha(z)} \eta_0 + \frac{1}{2} \mu \dot{x}(0,z) = \\ &= \dot{x}(0,z) \cdot \frac{1}{2} \cdot \mu + \frac{1}{2} \mu \dot{x}(0,z) = \mu \dot{x}(0,z), \end{aligned}$$

und es bleibt zu zeigen $\xi \neq 0$. Aus $\xi = 0$ folgt aber $\eta_0 = \xi(1) = 0$. ■

Lemma 7.6

1. Sei $\xi \in C_0$, $\xi \neq 0$. Dann gilt:

$U^2 \xi = -\xi \Leftrightarrow \xi$ ist differenzierbar, und es gibt differenzierbares $\eta \in C$ und $\mu \in \mathbb{R}$ mit

$$(*) \quad \begin{aligned} \dot{\eta} &= \alpha(z) f'(x_0^z) \xi, & \eta(0) &= \xi(1) \\ \ddot{\xi} &= -\alpha(z) f'(y_0^z) \eta + \mu \ddot{x}_0^z, & \xi(0) &= 0, & \eta(1) &= \mu \dot{x}(0,z) \end{aligned}$$

In diesem Fall gilt:

$$(i) \quad \eta = V^2 \xi, \quad \mu = 2 \frac{\alpha'(z)}{\alpha(z)} \xi(1),$$

$$(ii) \quad \alpha'(z) \cdot \int_0^1 u(s,z) \ddot{x}(s,z) ds = 0.$$

2. Es gilt :

$$\dim \text{Kern}(U^2 + 1_{C_0}) = 1 \Leftrightarrow \alpha'(z) \cdot \int_0^1 u(s,z) \ddot{x}(s,z) ds = 0.$$

In diesem Fall gilt für $(\cdot \in [0,1])$

$$\xi = q_0^z + 2 \frac{\alpha'(z)}{\alpha(z)} \left[v_0^z \cdot \int_0^1 p(s,z) \ddot{x}(s,z) ds - q_0^z \cdot \int_0^1 u(s,z) \ddot{x}(s,z) ds \right]$$

$$\eta = p_0^z + 2 \frac{\alpha'(z)}{\alpha(z)} \left[u_0^z \cdot \int_0^1 p(s,z) \ddot{x}(s,z) ds - p_0^z \cdot \int_0^1 u(s,z) \ddot{x}(s,z) ds \right]$$

$$(i) \quad \xi(0) = 0, \quad \xi(1) = \eta(0) = 1, \quad \eta(1) = -2\alpha'(z)f(z),$$

$$(ii) \quad \eta = V^z \xi,$$

$$(iii) \quad \text{Kern}(U^2 + 1_{C_0}) = \mathbb{R} \xi.$$

Beweis :

1. Sei $U^2 \xi = -\xi$, $\xi \neq 0$, also $\xi \in \text{Kern}(U^2 + 1_{C_0})$. Dann folgt für $\eta = V^z \xi$, $\mu = \frac{\eta(1)}{\xi(0,z)}$ aus Lemma 7.2 : $(\eta, \xi, \mu) = \hat{\varphi}^z(\xi) \in N^z$, d.h. (*) ist erfüllt. Gibt es umgekehrt ein differenzierbares $\eta \in C$ und $\mu \in \mathbb{R}$, so daß (*) gilt, so ist $(\eta, \xi, \mu) \in N^z$ und $\xi = \hat{\theta}^z(\eta, \xi, \mu) \in \text{Kern}(U^2 + 1_{C_0})$, also $U^2 \xi = -\xi$. Mit $\eta_0 = \xi(1)$, $\xi_0 = 0$ folgen (i, ii) aus Lemma 7.5.

2. Sei $\dim \text{Kern}(U^2 + 1_{C_0}) = 1$. Dann gibt es $\xi \in C_0$ mit $U^2 \xi = -\xi$ und $\xi \neq 0$, und $\alpha'(z) \cdot \int_0^1 u(s,z) \ddot{x}(s,z) ds = 0$ folgt aus 1(ii).

$$\text{Sei umgekehrt } \alpha'(z) \cdot \int_0^1 u(s,z) \ddot{x}(s,z) ds = 0.$$

Wir zeigen :

$$(a) \quad \text{Kern}(U^2 + 1_{C_0}) \neq \{0\},$$

(b) sind $\xi_1, \xi_2 \in \text{Kern}(U^2 + 1_{C_0})$, so sind ξ_1, ξ_2 linear abhängig, woraus $\dim \text{Kern}(U^2 + 1_{C_0}) = 1$ folgt.

Beweis von (a):

Wir müssen mit 1. differenzierbare $\eta, \xi \in C$ und $\mu \in \mathbb{R}$ finden mit $\xi \neq 0$, so daß (*) gilt.

Sei $\eta_0 = 1$, $\xi_0 = 0$, $\mu = 2 \frac{\alpha'(z)}{\alpha(z)}$ und (η, ξ) wie in Lemma 7.3(1), also

$$\eta = p(.,z) + 2 \frac{\alpha'(z)}{\alpha(z)} \left[u(.,z) \cdot \int_0^1 p(s,z) \ddot{x}(s,z) ds - p(.,z) \cdot \int_0^1 u(s,z) \ddot{x}(s,z) ds \right]$$

$$\xi = q(.,z) + 2 \frac{\alpha'(z)}{\alpha(z)} \left[v(.,z) \cdot \int_0^1 p(s,z) \ddot{x}(s,z) ds - q(.,z) \cdot \int_0^1 u(s,z) \ddot{x}(s,z) ds \right]$$

Dann ist Lemma 7.5(ii) erfüllt, und Lemma 7.5(i) ist die Behauptung.

Schränken wir nun noch ξ und η auf $[0,1]$ ein, so erhalten wir mit

$$\eta(1) = \mu \dot{\xi}(0,z) = -2\alpha'(z)f(z) \text{ auch die Behauptungen (i, ii, iii).}$$

Beweis von (b):

Seien $\xi_1, \xi_2 \in \text{Kern}(U^2 + 1_{C_0})$. Ist $\xi_1 = 0$ oder $\xi_2 = 0$, so ist die Behauptung klar. Sei also $\xi_1 \neq 0, \xi_2 \neq 0$ und

$$\eta_1 = V^2 \xi_1, \eta_2 = V^2 \xi_2, \mu_1 = 2 \frac{\alpha'(z)}{\alpha(z)} \xi_1(1), \mu_2 = 2 \frac{\alpha'(z)}{\alpha(z)} \xi_2(1).$$

Dann gilt mit 1. ($\alpha = \alpha(z)$):

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_1 &= \alpha f'(x_0^z) \xi_1, & \eta_1(0) &= \xi_1(1), & \eta_1(1) &= \mu_1 \dot{x}(0, z) \\ \dot{\xi}_1 &= -\alpha f'(y_0^z) \eta_1 + \mu_1 \ddot{x}_0^z, & \xi_1(0) &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_2 &= \alpha f'(x_0^z) \xi_2, & \eta_2(0) &= \xi_2(1), & \eta_2(1) &= \mu_2 \dot{x}(0, z) \\ \dot{\xi}_2 &= -\alpha f'(y_0^z) \eta_2 + \mu_2 \ddot{x}_0^z, & \xi_2(0) &= 0. \end{aligned}$$

Sei $c_1 = \xi_2(1), c_2 = -\xi_1(1)$ und

$$\xi = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2, \eta = c_1 \eta_1 + c_2 \eta_2, \mu = c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2;$$

dann ist $\xi(0) = 0, \xi(1) = 0, \eta(0) = 0, \eta(1) = 0, \mu = 0$ und:

$$\begin{aligned} \dot{\eta} &= \xi_1(1) \dot{\eta}_2 - \xi_2(1) \dot{\eta}_1 = \alpha f'(x_0^z) [\xi_1(1) \xi_2 - \xi_2(1) \xi_1] = \alpha f'(x_0^z) \xi, \\ \dot{\xi} &= \xi_1(1) \dot{\xi}_2 - \xi_2(1) \dot{\xi}_1 = -\alpha f'(y_0^z) [\xi_1(1) \eta_2 - \xi_2(1) \eta_1] + \\ &\quad + [\xi_1(1) \mu_2 - \xi_2(1) \mu_1] \ddot{x}_0^z \\ &= -\alpha f'(y_0^z) \eta + 0 \cdot \ddot{x}_0^z, \end{aligned}$$

d.h. es ist $\dot{\eta} = \alpha f'(x_0^z) \xi, \eta(0) = 0$

$$\dot{\xi} = -\alpha f'(y_0^z) \eta, \xi(0) = 0.$$

Hieraus folgt aber $\eta = 0, \xi = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 = 0$, und ξ_1, ξ_2 sind linear abhängig, wenn $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ ist. Aus $c_1 = \xi_2(1) = 0$ folgt aber $\eta_2(0) = \xi_2(1) = 0, \mu_2 = 2 \frac{\alpha'(z)}{\alpha(z)} \xi_2(1) = 0$, und aus den Gleichungen für $\dot{\eta}_2, \dot{\xi}_2$ folgt $\eta_2 = \xi_2 = 0$. ■

Damit erhalten wir als Ziel dieses Abschnittes:

Satz 7.1

Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ ungerade, $f(0) = 0, f'(0) < 0, x f(x) < 0$ für $x \neq 0$.

Sei $z > 0$. Dann gilt für den Operator U^2 :

1. Ist $\alpha'(z) = 0$, so ist $\dim \text{Kern}(U^2 + 1_{C_0}) = 1$ und

$$\text{Kern}(U^2 + 1_{C_0}) = \mathbb{R} q_0^z.$$

2. Ist $\alpha'(z) \neq 0$, so ist $\dim \text{Kern}(U^2 + 1_{C_0}) = 1$ genau dann, wenn

$$\int_0^1 u(s, z) \ddot{x}(s, z) ds = 0 \text{ ist.}$$

In diesem Fall ist $\text{Kern}(U^2 + 1_{C_0}) = \mathbb{R} \xi$ mit dem in Lemma 7.6(2) angegebenen $\xi \in C_0$.

Bemerkungen :

1. Als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß -1 Eigenwert ist, haben wir somit gefunden :

$$\alpha'(z) = 0 \text{ oder } (\alpha'(z) \neq 0 \text{ und } \int_0^1 u(s,z) \ddot{x}(s,z) ds = 0)$$

Die Bedingung $\dim \text{Kern } (U^2 + 1_{C_0}) = 1$ ist dabei stets erfüllt, so daß wir für unser Verzweigungsproblem nur noch untersuchen müssen, wann $U^2 + 1_{C_0}$ Fredholmoperator mit Index 0 ist, und wann

$$\frac{d}{dz} (U^2 \xi) \in \text{Bild } (U^2 + 1_{C_0})$$

für (alle) $\xi \in \text{Kern } (U^2 + 1_{C_0})$ gilt.

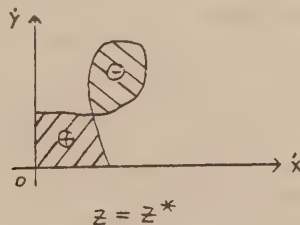
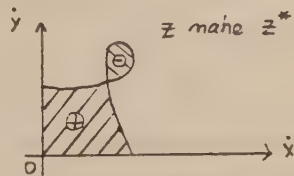
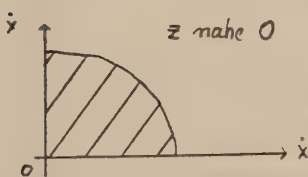
Dabei wird sich zeigen, daß $U^2 + 1_{C_0}$ stets Fredholmoperator mit Index 0 ist. Wegen Bedingung (1) aus Satz 5.1 werden wir nur den Fall $\alpha'(z) \neq 0$ untersuchen.

2. Zur geometrischen Bedeutung von $\int_0^1 u(s,z) \ddot{x}(s,z) ds = 0$:

Wegen $u(.,z) = \frac{1}{\alpha f(z)} \dot{y}(.,z)$ ist diese Bedingung äquivalent mit

$$\int_0^1 \dot{y}(s,z) \ddot{x}(s,z) ds = 0,$$

Dies ist aber die Leibnizsche Sektorformel für den Flächeninhalt des von der Kurve $(\dot{x}(.,z), \dot{y}(.,z))$ eingeschlossenen Sektors.



8. Die Bedingung "B (Kern A) $\not\subset$ Bild A"

In diesem Abschnitt nehmen wir an, daß es $z^* > 0$ gibt mit

$$\alpha'(z^*) \neq 0 \text{ und } \int_0^1 u(t, z^*) \ddot{x}(t, z^*) dt = 0.$$

Der Übersichtlichkeit halber schreiben wir α' für $\alpha(z^*)$ und U' für U^{z^*} sowie $x^*, y^*, \dots$ für $x(., z^*), y(., z^*)$ usw.

Sei $\xi \in C_0$ wie in Lemma 7.6(2). Dann lautet die 3. Voraussetzung in Satz 5.1:

$$\frac{d}{dz} \Big|_{z^*} (U^2 \xi) \in \text{Bild} (U' + 1_{C_0}).$$

Wir wollen nun diese Bedingung untersuchen und zeigen, daß $U' + 1_{C_0}$ Fredholm-operator mit Index 0 ist. Dazu charakterisieren wir zunächst $\text{Bild}(U' + 1_{C_0})$:

Lemma 8.1

Sei $L: C_0 \ni x \mapsto x(1) + \int_0^1 \dot{u}^* x dt \in \mathbb{R}$.

Dann ist L linear und stetig, also $L \in L(C_0, \mathbb{R})$ und es gilt:

$$\text{Bild}(U' + 1_{C_0}) = \text{Kern } L.$$

Beweis:

Wir zeigen nur $\text{Bild}(U' + 1_{C_0}) = \text{Kern } L$ bzw.

$$x \in \text{Bild}(U' + 1_{C_0}) \Leftrightarrow Lx = 0 \text{ für alle } x \in C_0.$$

Sei also $x \in C_0$ und für $\mu, \psi_0 \in \mathbb{R}$ sei

$$\begin{pmatrix} \psi(\dots, \psi_0, \mu) \\ \gamma(\dots, \psi_0, \mu) \end{pmatrix}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

die maximale Lösung von

$$(*) \quad \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = A^* \begin{pmatrix} \psi \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha^* f'(x^*) x \\ \mu \ddot{x}^* \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \psi(0) \\ \gamma(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Wir interessieren uns zunächst für $\psi(1, \psi_0, \mu)$ und $\gamma(1, \psi_0, \mu)$.

Da wir die Fundamentalmatrix S^* des zu (*) gehörenden homogenen Systems kennen, können wir (*) sofort lösen:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \psi(\dots, \psi_0, \mu) \\ \gamma(\dots, \psi_0, \mu) \end{pmatrix} &= S^* \left[\begin{pmatrix} \psi_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^1 S^{*-1} \begin{pmatrix} \alpha^* f'(x^*) x \\ \mu \ddot{x}^* \end{pmatrix} dt \right] = \\ &= S^* \left[\begin{pmatrix} \psi_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^1 \begin{pmatrix} v^* & -u^* \\ -q^* & p^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^* f'(x^*) x \\ \mu \ddot{x}^* \end{pmatrix} dt \right] = \\ &= S^* \left[\begin{pmatrix} \psi_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^1 \begin{pmatrix} \alpha^* f'(x^*) v^* x - \mu u^* \ddot{x}^* \\ -\alpha^* f'(x^*) q^* x + \mu p^* \ddot{x}^* \end{pmatrix} dt \right]. \end{aligned}$$

Wegen $\dot{u}^* = \alpha^* f'(x^*) v^*$, $\dot{p}^* = \alpha^* f'(x^*) q^*$ folgt:

$$\begin{pmatrix} \psi(\dots, \psi_0, \mu) \\ \gamma(\dots, \psi_0, \mu) \end{pmatrix} = S^* \left[\begin{pmatrix} \psi_0 \\ 0 \end{pmatrix} + \int_0^1 \begin{pmatrix} \dot{u}^* x - \mu u^* \ddot{x}^* \\ -\dot{p}^* x + \mu p^* \ddot{x}^* \end{pmatrix} dt \right].$$

Nach Voraussetzung ist $\int_0^1 u^* \ddot{x}^* dt = 0$ und wegen $S^*(1) = S(1, z^*) = \begin{pmatrix} p^*(1) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ aus Lemma 6.2(4) folgt:

$$\begin{pmatrix} \psi(1, \psi_0, \mu) \\ \gamma(1, \psi_0, \mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^*(1) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0 + \int_0^1 \ddot{u}^* x dt \\ \int_0^1 (\mu p^* \ddot{x}^* - \dot{p}^* x) dt \end{pmatrix},$$

d.h. es ist mit Lemma 7.4

$$\gamma(1, \psi_0, \mu) = \psi_0 + \int_0^1 \ddot{u}^* x dt = \psi_0 - x(1) + Lx,$$

$$\begin{aligned} \psi(1, \psi_0, \mu) &= p^*(1) \cdot \gamma(1, \psi_0, \mu) - \mu \int_0^1 p^* \ddot{x}^* dt + \int_0^1 \dot{p}^* x dt \\ &= p^*(1) \cdot \gamma(1, \psi_0, \mu) + \frac{1}{2} \mu \dot{x}(0, z^*) + \int_0^1 \dot{p}^* x dt. \end{aligned}$$

Sei nun $x \in \text{Bild}(U^* + 1_{C_0})$, also $x = U^* \varphi + \varphi$ für ein $\varphi \in C_0$.

Dann sei $\gamma = \varphi - x$, $\psi = V^* \varphi$ und $\mu = \frac{\psi(1)}{x(0, z^*)}$, $\psi_0 = \psi(0)$; ψ ist differenzierbar und mit Lemma 6.1(1) gilt:

$$\dot{\psi} = \alpha^* f'(x_0^*) \varphi = \alpha^* f'(x_0^*) \gamma + \alpha^* f'(x_0^*) x, \quad \psi_0 = \varphi(1).$$

Weiter ist mit Lemma 6.1(3):

$$\gamma = \varphi - x = \varphi - (U^* \varphi + \varphi) = -U^* \varphi = -W^* \varphi + \dot{x}_0^* \frac{\psi(1)}{x(0, z^*)} = -W^* \varphi + \mu \dot{x}_0^*,$$

d.h. γ ist differenzierbar mit

$$\dot{\gamma} = -(W^* \varphi)' + \mu \ddot{x}_0^* = -\alpha^* f'(y_0^*) \psi + \mu \ddot{x}_0^*.$$

Insgesamt gilt also

$$\begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha^* f'(x_0^*) \\ -\alpha^* f'(y_0^*) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \gamma \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha^* f'(x_0^*) x \\ \mu \ddot{x}_0^* \end{pmatrix},$$

und

$$\psi(0) = \psi_0, \quad \gamma(0) = \varphi(0) - x(0) = 0 - 0 = 0,$$

d.h. es ist $\psi = \psi(\cdot, \psi_0, \mu)$, $\gamma = \gamma(\cdot, \psi_0, \mu)$ und

$$\psi_0 - x(1) = \varphi(1) - x(1) = \gamma(1) = \gamma(1, \psi_0, \mu) = \psi_0 - x(1) + Lx,$$

woraus $Lx = 0$ folgt.

Sei nun umgekehrt $Lx = 0$. Dann gilt $\gamma(1, \psi_0, \mu) = \psi_0 - x(1)$ für alle $\psi_0, \mu \in \mathbb{R}$.

Wir können nun ψ_0 und μ so wählen, daß $\psi(1, \psi_0, \mu) = \mu \dot{x}(0, z^*)$ gilt, z.B.

$$\psi_0 = 0, \quad \mu = \frac{2}{x(0, z^*)} \left[-p^*(1) x(1) + \int_0^1 \dot{p}^* x dt \right]$$

Sei nun $\varphi = \varphi(\cdot, \psi_0, \mu)$, $\gamma = \gamma(\cdot, \psi_0, \mu)$ und $\varphi = \gamma + x$.

Dann gilt:

$$\varphi(0) = \gamma(0) + x(0) = 0 + 0 = 0,$$

$$\varphi(1) = \gamma(1) + x(1) = \psi_0 - x(1) + x(1) = \psi_0 = 0 = \varphi(0),$$

$$\dot{\varphi} = \alpha^* f'(x_0^*) \gamma + \alpha^* f'(x_0^*) x = \alpha^* f'(x_0^*) \varphi,$$

also ist mit Lemma 6.1(1) $V^* \varphi = \psi$. Damit folgt

$$\begin{aligned} W^* \varphi &= \psi(1) + \int_0^1 \alpha' f'(y_0^*) \psi \, ds = \psi(1) + \int_0^1 (\mu \bar{x}^* - \dot{y}) \, ds = \\ &= \psi(1) + \mu \dot{x}_0^* - \mu \dot{x}(0, z^*) - \gamma + \gamma(0) = \mu \dot{x}_0^* - \gamma, \end{aligned}$$

und mit $W^* \varphi(0) = \mu \dot{x}(0, z^*)$ erhalten wir:

$$U^* \varphi = W^* \varphi - \dot{x}_0^* \frac{W^* \varphi(0)}{\dot{x}(0, z^*)} = \mu \dot{x}_0^* - \gamma - \mu \dot{x}_0^* = -\gamma = -\varphi + x,$$

d.h. $x = U^* \varphi + \varphi \in \text{Bild}(U^* + 1_{C_0})$. ■

Corollar 8.1

$U^* + 1_{C_0}$ ist Fredholmoperator mit Index 0.

Beweis:

Es muß nur noch $\text{codim Kern } L = 1$ gezeigt werden, denn $\text{Kern}(U^* + 1_{C_0})$ ist endlichdimensional mit Dimension 1, $\text{Bild}(U^* + 1_{C_0}) = L^{-1}(\{0\})$ ist abgeschlossen, da L stetig ist, und es gilt $\text{codim Bild}(U^* + 1_{C_0}) = \text{codim Kern } L$. Nun ist $\text{codim Kern } L = \dim(C_0 / \text{Kern } L) = \dim(\text{Bild } L)$, also $\text{codim Kern } L = 1 \Leftrightarrow \text{Bild } L = \mathbb{R} \Leftrightarrow L$ surjektiv $\Leftrightarrow Lx \neq 0$ für ein $x \in C_0$. Wegen $u^*(0) = 0$ ist $u_0^* \in C_0$, und mit $u^*(1) = -1$ folgt:

$$Lu_0^* = u_0^*(1) + \int_0^1 \dot{u}^* u_0^* \, dt = u_0^*(1) + \frac{1}{2} |u_0^*|^2 \Big|_0^1 = u_0^*(1) + \frac{1}{2} u_0^*(1) = -\frac{1}{2} \neq 0. \quad \blacksquare$$

Für das Weitere sei nun $(\cdot \in [0, 1])$

$$\eta^* = p_0^* + 2 \frac{\alpha'(z^*)}{\alpha^*} \left[u_0^* \cdot \int_0^1 p^* \ddot{x}^* \, ds - p_0^* \cdot \int_0^1 u^* \ddot{x}^* \, ds \right],$$

$$\xi^* = q_0^* + 2 \frac{\alpha'(z^*)}{\alpha^*} \left[v_0^* \cdot \int_0^1 p^* \ddot{x}^* \, ds - q_0^* \cdot \int_0^1 u^* \ddot{x}^* \, ds \right],$$

$$\mu^* = 2 \frac{\alpha'(z^*)}{\alpha^*};$$

dann gilt mit Lemma 7.6 und Satz 7.1:

$$\eta^* = V^* \xi^* \quad \text{und} \quad \text{Kern}(U^* + 1_{C_0}) = \mathbb{R} \xi^*.$$

Sei $x = \frac{d}{dz} \Big|_{z^*} (U^2 \xi^*)$, dann lautet die Bedingung (3) von Satz 5.1:

$$x \in \text{Bild}(U^* + 1_{C_0}).$$

Wegen Lemma 8.1 ist dies äquivalent zu $Lx \neq 0$.

Wir berechnen daher als Nächstes Lx in

Lemma 8.2

$$Lx = \mu^* \frac{d}{dz} \Big|_{z^*} \left[\int_0^1 u(t, z) \ddot{x}(t, z) dt \right].$$

Beweis :

1. Sei $z > 0$; wir definieren folgende Hilfsfunktionen :

$$\eta^z = V^z \zeta^*, \quad \zeta^z = U^z \zeta^*, \quad \mu^z = \frac{\eta^z(1)}{\dot{x}(0, z)}.$$

Dann gilt mit Lemma 6.1 :

$$\begin{aligned} \dot{\eta}^z &= \alpha f'(x_0^z) \zeta^* & \eta^z(0) &= \zeta^*(1), \quad \eta^z(1) = \mu^z \dot{x}(0, z), \\ \dot{\zeta}^z &= \alpha f'(y_0^z) \eta^z - \mu^z \ddot{x}_0^z & \end{aligned}$$

und speziell für $z = z^*$:

$$\begin{aligned} \eta^{z^*} &= \eta^*, \quad \zeta^{z^*} = \zeta^* = -\zeta^*, \quad \mu^{z^*} = \frac{\eta^*(1)}{\dot{x}(0, z^*)} = \mu^* = 2 \frac{\alpha(z^*)}{\alpha^*}, \\ \dot{\eta}^* &= \alpha^* f(x_0^*) \zeta^* & \eta^*(0) &= \zeta^*(1), \quad \eta^*(1) = \mu^* \dot{x}(0, z^*), \\ \dot{\zeta}^* &= -\dot{\zeta}^* = \alpha^* f(y_0^*) \eta^* - \mu^* \ddot{x}_0^* & \end{aligned}$$

2. Es ist $x = \frac{d}{dz} \Big|_{z^*} \zeta^z$ und x ist differenzierbar mit

$$\dot{x} = \frac{d}{dz} \Big|_{z^*} \dot{\zeta}^z = \frac{d}{dz} \Big|_{z^*} [\alpha f'(y_0^z) \eta^z - \mu^z \ddot{x}_0^z].$$

Mit Lemma 6.2(4) und den Abkürzungen

$$u_z^* = \frac{\partial u}{\partial z}(\cdot, z^*), \quad x_z^* = \frac{\partial x}{\partial z}(\cdot, z^*)$$

ergibt partielle Integration :

$$\begin{aligned} Lx &= x(1) + \int_0^1 \dot{u}^* x dt = x(1) + u^* x \Big|_0^1 - \int_0^1 u^* \dot{x} dt = \\ &= x(1) + (-1) \cdot x(1) - 0 \cdot x(0) - \int_0^1 u^* \dot{x} dt = - \int_0^1 u^* \dot{x} dt = \\ &= - \int_0^1 u^* \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{z^*} [\alpha f'(y^z) \eta^z - \mu^z \ddot{x}^z] dt = \\ &= - \int_0^1 u^* \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{z^*} [\alpha f'(y^z) \eta^z] dt + \int_0^1 u^* \ddot{x}^* \left[\frac{d}{dz} \Big|_{z^*} \mu^z \right] dt + \\ &\quad + \int_0^1 \mu^* u^* \left[\frac{\partial}{\partial z} \Big|_{z^*} \ddot{x}^z \right] dt = \\ &= - \int_0^1 u^* \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{z^*} [\alpha f'(y^z) \eta^z] dt + 0 + \mu^* \int_0^1 u^* \ddot{x}_z^* dt + \\ &\quad + \mu^* \int_0^1 u_z^* \ddot{x}^* dt - \mu^* \int_0^1 u_z^* \ddot{x}^* dt = \\ &= - \int_0^1 u^* \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{z^*} [\alpha f'(y^z) \eta^z] dt + \mu^* \frac{d}{dz} \Big|_{z^*} \left[\int_0^1 u(t, z) \ddot{x}(t, z) dt \right] - \\ &\quad - \mu^* \int_0^1 u_z^* \ddot{x}^* dt. \end{aligned}$$

3. Damit ist nur noch

$$\int_0^1 u^* \frac{\partial}{\partial z} \Big|_{z^*} [\alpha f'(y^z) \eta^z] dt = -\mu^* \int_0^1 u_z^* \ddot{x}^* dt$$

zu zeigen.

$$\text{Sei } c_1 = \int_0^1 u^* \left[\frac{\partial}{\partial z} \Big|_z \cdot \alpha f'(y^z) \right] \eta^z dt,$$

$$c_2 = \int_0^1 u^* \alpha^* f'(y^*) \left[\frac{\partial}{\partial z} \Big|_z \cdot \eta^z \right] dt,$$

$$c = c_1 + c_2 = \int_0^1 u^* \frac{\partial}{\partial z} \Big|_z \cdot [\alpha f'(y_0^z) \eta^z] dt.$$

Wir formen nun als erstes c_2 um. Mit $\alpha^* f'(y^*) u^* = -\dot{v}^*$ ergibt partielle Integration:

$$c_2 = \int_0^1 -\dot{v}^* \left[\frac{\partial}{\partial z} \Big|_z \cdot \eta^z \right] dt = -v^* \left[\frac{\partial}{\partial z} \Big|_z \cdot \eta^z \right] \Big|_0^1 + \int_0^1 v^* \left[\frac{\partial}{\partial z} \Big|_z \cdot \dot{\eta}^z \right] dt;$$

wegen $v^*(1) = 0$ aus Lemma 6.2(4) und $\eta^z(0) = \zeta^*(1)$, also $\frac{\partial}{\partial z} \Big|_z \cdot \eta^z(0) = 0$ folgt

$$c_2 = \int_0^1 v^* \left[\frac{\partial}{\partial z} \Big|_z \cdot \dot{\eta}^z \right] dt = \int_0^1 v^* \left[\frac{\partial}{\partial z} \Big|_z \cdot \alpha f'(x^z) \zeta^* \right] dt,$$

und somit:

$$c = \int_0^1 \left(u^* \eta^* \left[\frac{\partial}{\partial z} \Big|_z \cdot \alpha f'(y^z) \right] + v^* \zeta^* \left[\frac{\partial}{\partial z} \Big|_z \cdot \alpha f'(x^z) \right] \right) dt.$$

Nun ergibt Differentiation von

$$\dot{u}(\cdot, z) = \alpha f'(x^z) v(\cdot, z), \quad u(0, z) = 0, \quad u(1, z) = -1$$

$$\dot{v}(\cdot, z) = -\alpha f'(y^z) u(\cdot, z), \quad v(0, z) = 1, \quad v(1, z) = 0$$

nach z bei z^* :

$$\begin{aligned} \dot{u}_z^* &= \left[\frac{\partial}{\partial z} \Big|_z \cdot \alpha f'(x^z) \right] v^* + \alpha^* f'(x^*) v_z^*, & u_z^*(0) &= u_z^*(1) = 0 \\ \dot{v}_z^* &= -\left[\frac{\partial}{\partial z} \Big|_z \cdot \alpha f'(y^z) \right] u^* - \alpha^* f'(y^*) u_z^*, & v_z^*(0) &= v_z^*(1) = 0, \end{aligned}$$

bzw.

$$u^* \left[\frac{\partial}{\partial z} \Big|_z \cdot \alpha f'(y^z) \right] = -\dot{v}_z^* - \alpha^* f'(y^*) u_z^*,$$

$$v^* \left[\frac{\partial}{\partial z} \Big|_z \cdot \alpha f'(x^z) \right] = \dot{u}_z^* - \alpha^* f'(x^*) v_z^*,$$

also:

$$c = \int_0^1 \left[-\eta^* (\dot{v}_z^* + \alpha^* f'(y^*) u_z^*) + \zeta^* (\dot{u}_z^* - \alpha^* f'(x^*) v_z^*) \right] dt.$$

Nun war aber mit 1. $\dot{\eta}^* = \alpha^* f'(x_0^*) \zeta^*$, $\dot{\zeta}^* = -\alpha^* f'(y_0^*) \eta^* + \mu^* \ddot{x}_0^*$, also

$$\begin{aligned} c &= \int_0^1 \left[-\eta^* \cdot \dot{v}_z^* + (\dot{\zeta}^* - \mu^* \ddot{x}_0^*) \cdot u_z^* + \zeta^* \dot{u}_z^* - \dot{\eta}^* v_z^* \right] dt = \\ &= -\mu^* \int_0^1 \ddot{x}_0^* u_z^* dt + \int_0^1 [\dot{\zeta}^* u_z^* + \zeta^* \dot{u}_z^*] dt - \int_0^1 [\eta^* \dot{v}_z^* + \dot{\eta}^* v_z^*] dt = \\ &= -\mu^* \int_0^1 \ddot{x}_0^* u_z^* dt + \int_0^1 [\zeta^* u_z^*]' dt - \int_0^1 [\eta^* v_z^*]' dt = \\ &= -\mu^* \int_0^1 \ddot{x}_0^* u_z^* dt + [\zeta^* u_z^*] \Big|_0^1 - [\eta^* v_z^*] \Big|_0^1 = \end{aligned}$$

$$= -\mu^* \int_0^1 \ddot{x}_0 u_z^* dt.$$

Damit müssen wir also $\mu^* \cdot \frac{d}{dz} \Big|_{z^*} \int_0^1 u(t,z) \ddot{x}(t,z) dt$ berechnen.

Sei

$$r(z) = \int_0^1 u(t,z) \ddot{x}(t,z) dt,$$

also $r(z^*) = 0$, $Lx = \mu^* r'(z^*)$.

Nun ist $\dot{x} = \alpha f(y)$, $x(0,z) = 0$, $x(1,z) = z$, $\alpha = \alpha(z)$

$$\dot{y} = -\alpha f(x), \quad y(0,z) = -z, \quad y(1,z) = 0,$$

und Differentiation ergibt mit $b = f'(0)$:

$$\ddot{x} = \alpha f'(y) \dot{y} = -\alpha^2 f'(y) f(x), \quad \dot{x}(0,z) = -\alpha f(z), \quad \dot{x}(1,z) = 0$$

$$\ddot{y} = -\alpha f'(x) \dot{x} = -\alpha^2 f'(x) f(y), \quad \dot{y}(0,z) = 0, \quad \dot{y}(1,z) = -\alpha f(z)$$

$$\ddot{x} = \alpha^2 f''(y) f^2(x) - \alpha^2 f'(x) f'(y) f(y), \quad \ddot{x}(0,z) = 0, \quad \ddot{x}(1,z) = -\alpha^2 f(z) \cdot b$$

$$\ddot{y} = -\alpha^2 f''(x) f^2(y) + \alpha^2 f'(x) f'(y) f(x), \quad \ddot{y}(0,z) = \alpha^2 f(z) \cdot b, \quad \ddot{y}(1,z) = 0$$

und mit Lemma 6.2(1) gilt:

$$u(.,z) = \frac{1}{\alpha f(z)} \dot{y}(.,z) = -\frac{1}{f(z)} f(x(.,z)).$$

Damit wird

$$\begin{aligned} r(z) &= \frac{\alpha^2(z)}{f(z)} \int_0^1 f^2(x(t,z)) f'(y(t,z)) dt \\ &= \frac{1}{\alpha f(z)} \int_0^1 \ddot{x}(t,z) \dot{y}(t,z) dt. \end{aligned}$$

Bevor wir $r'(z)$ berechnen, noch drei Vorbemerkungen:

1. Aus dem Satz von Kaplan und Yorke erhalten wir für $z > 0, t \in \mathbb{R}$:

$$x(1-t,z) = -x(t-1,z) = -y(t,z), \quad y(1-t,z) = x(-t,z) = -x(t,z)$$

und die Substitution $t \mapsto 1-t$ in $r(z)$ liefert:

$$r(z) = \frac{\alpha^2(z)}{f(z)} \int_0^1 f^2(y(t,z)) f'(x(t,z)) dt = -\frac{1}{\alpha f(z)} \int_0^1 \dot{x}(t,z) \ddot{y}(t,z) dt,$$

also:

$$r(z) = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2(z)}{f(z)} \int_0^1 [f^2(x) f'(y) + f^2(y) f'(x)] dt = \frac{1}{2\alpha f(z)} \int_0^1 (\ddot{x} \dot{y} - \dot{x} \ddot{y}) dt.$$

wobei wir von nun an die Argumente (t,z) weglassen.

Die letzten beiden Integranden sind invariant unter $t \mapsto 1-t$.

2. Aus $p \vee -q u = 1$ (Bemerkung 2 zu Definition 6.1) folgt wegen $\alpha f(z) u = \dot{y}$

und $\alpha f(z) v = -\dot{x}$ aus Lemma 6.2(1):

$$\alpha f(z) = -p \dot{x} - q \dot{y} \quad \text{bzw.} \quad f(z) = -p f(y) + q f(x).$$

3. Wegen $F(x) + F(y) = F(z)$, $F = \int^\cdot f(u) du$ (Satz von Kaplan und Yorke)

folgt durch Differentiation nach z :

$$f(x) x_z + f(y) y_z = f(z) .$$

Lemma 8.3

$$r'(z) = \left(\frac{\alpha'(z)}{\alpha(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)} \right) r(z) + \alpha^2(z) \cdot \int_0^1 f'(x) f'(y) dt .$$

Beweis :

1. Sei $a(z) = \frac{\alpha^2(z)}{f(z)}$, also $r(z) = a(z) \cdot \int_0^1 [f^2(x) f'(y) + f^2(y) f'(x)] dt$.

Dann folgt :

$$\begin{aligned} r'(z) &= \frac{a'(z)}{a(z)} r(z) + a(z) \int_0^1 \frac{\partial}{\partial z} [f^2(x) f'(y) + f^2(y) f'(x)] dt = \\ &= \frac{a'(z)}{a(z)} r(z) + a(z) \int_0^1 [2 f(x) f'(x) f'(y) + f^2(y) f''(x)] x_z dt + \\ &\quad + a(z) \int_0^1 [f^2(x) f''(y) + 2 f(y) f'(x) f'(y)] y_z dt = \\ &= \frac{a'(z)}{a(z)} r(z) + a(z) \int_0^1 \left[-\frac{1}{\alpha^3} \bar{y} + 3 f(x) f'(x) f'(y) \right] x_z dt + \\ &\quad + a(z) \int_0^1 \left[\frac{1}{\alpha^3} \bar{x} + 3 f'(x) f'(y) f(y) \right] y_z dt = \\ &= \frac{a'(z)}{a(z)} r(z) + \frac{a(z)}{\alpha^3} \int_0^1 (\bar{x} y_z - \bar{y} x_z) dt + \\ &\quad + 3 a(z) \int_0^1 [f(x) x_z + f(y) y_z] f'(x) f'(y) dt = \\ &= \frac{a'(z)}{a(z)} r(z) + \frac{a(z)}{\alpha^3} \int_0^1 (\bar{x} y_z - \bar{y} x_z) dt + 3 a(z) f(z) \cdot \int_0^1 f'(x) f'(y) dt . \end{aligned}$$

2. Berechnung von $d = \int_0^1 (\bar{x} y_z - \bar{y} x_z) dt$:

Mit $x_z = q - \alpha' f(z) \cdot t \cdot v = q + \frac{\alpha'}{\alpha} t \dot{x}$, $y_z = -p + \alpha' f(z) \cdot t \cdot u = -p + \frac{\alpha'}{\alpha} t \dot{y}$
aus Lemma 6.2(3) folgt :

$$d = \int_0^1 \left(-\bar{x} p + \frac{\alpha'}{\alpha} t \bar{x} \dot{y} - \bar{y} q - \frac{\alpha'}{\alpha} t \bar{y} \dot{x} \right) dt = -d_1 + \frac{\alpha'}{\alpha} \cdot d_2$$

mit

$$d_1 = \int_0^1 (\bar{x} p + \bar{y} q) dt , \quad d_2 = \int_0^1 t \cdot (\bar{x} \dot{y} - \bar{y} \dot{x}) dt .$$

Berechnung von d_1 :

Mit $\dot{p} = \alpha f'(x) q$, $\dot{q} = -\alpha f'(y) p$ folgt :

$$\begin{aligned} d_1 &= \int_0^1 \left[p \left(\frac{d}{dt} \bar{x} \right) + q \left(\frac{d}{dt} \bar{y} \right) \right] dt = (p \bar{x} + q \bar{y}) \Big|_0^1 - \int_0^1 (\dot{p} \bar{x} + \dot{q} \bar{y}) dt = \\ &= (p(1,z) \bar{x}(1,z) + q(1,z) \bar{y}(1,z)) - (p(0,z) \bar{x}(0,z) + q(0,z) \bar{y}(0,z)) - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^1 [\alpha f'(x) q \ddot{x} - \alpha f'(y) p \ddot{y}] dt = \\
 & = (-\alpha^2 f(z) b p(1, z) + 0) - (0 + 0) - \\
 & - \int_0^1 [-\alpha f'(x) q \alpha^2 f'(y) f(x) + \alpha f'(y) p \alpha^2 f'(x) f(y)] dt = \\
 & = \alpha^2 \alpha' f^2(z) b - \alpha^3 \cdot \int_0^1 f'(x) f'(y) [p f(y) - q f(x)] dt = \\
 & = \alpha^2 \alpha' f^2(z) b - \alpha^3 \cdot \int_0^1 f'(x) f'(y) [-f(z)] dt = \\
 & = \alpha^2 \alpha' f^2(z) b + \alpha^3 f(z) \cdot \int_0^1 f'(x) f'(y) dt .
 \end{aligned}$$

Berechnung von d_2 :

$$\begin{aligned}
 d_2 &= \int_0^1 t \cdot (\ddot{x} \dot{y} - \ddot{y} \dot{x}) dt = \int_0^1 t \cdot \frac{d}{dt} (\ddot{x} \dot{y} - \ddot{y} \dot{x}) dt = \\
 &= t \cdot (\ddot{x} \dot{y} - \ddot{y} \dot{x}) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{dt}{dt} (\ddot{x} \dot{y} - \ddot{y} \dot{x}) dt = \\
 &= \ddot{x}(1, z) \dot{y}(1, z) - \ddot{y}(1, z) \dot{x}(1, z) - \int_0^1 (\ddot{x} \dot{y} - \ddot{y} \dot{x}) dt = \\
 &= (-\alpha^2 f(z) b) \cdot (-\alpha f(z)) - 0 \cdot 0 - 2 \alpha f(z) r(z) = \\
 &= \alpha^3 f^2(z) b - 2 \alpha f(z) r(z) .
 \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir :

$$\begin{aligned}
 d &= -d_1 + \frac{\alpha'}{\alpha} d_2 = \\
 &= -\alpha^2 \alpha' f^2(z) b - \alpha^3 f(z) \int_0^1 f'(x) f'(y) dt + \frac{\alpha'}{\alpha} \cdot \alpha^3 f^2(z) b - \frac{\alpha'}{\alpha} \cdot 2 \alpha f(z) r(z) \\
 &= -2 \alpha' f(z) r(z) - \alpha^3 f(z) \int_0^1 f'(x) f'(y) dt .
 \end{aligned}$$

3. Somit gilt :

$$\begin{aligned}
 r'(z) &= \frac{a'(z)}{a(z)} r(z) + \frac{a(z)}{\alpha^3} [-2 \alpha' f(z) r(z) - \alpha^3 f(z) \int_0^1 f'(x) f'(y) dt] + \\
 &+ 3 a(z) f(z) \int_0^1 f'(x) f'(y) dt = \\
 &= \left[\frac{a'(z)}{a(z)} - 2 a(z) \frac{\alpha'}{\alpha^3} f(z) \right] r(z) + 2 a(z) f(z) \cdot \int_0^1 f'(x) f'(y) dt .
 \end{aligned}$$

4. Mit $a = \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{f}$ folgt noch :

$$\frac{a'}{a} - 2 a \frac{\alpha'}{\alpha^3} f = \frac{a'}{a} - 2 \cdot \frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{f} \frac{\alpha'}{\alpha^3} f = \frac{a'}{a} - \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\alpha}{a} \left(\frac{a'}{\alpha} \right) = \frac{f}{a} \left(\frac{\alpha'}{f} \right) = \frac{\alpha'}{\alpha} - \frac{f'}{f} .$$

Aus Lemma 8.2 und 8.3 folgt wegen $\mu^* = 2 \frac{\alpha'(z^*)}{\alpha(z^*)}$ sofort :

Corollar 8.2

$$Lx = 2 \alpha(z^*) \alpha'(z^*) \int_0^1 f'(x(t, z^*)) f'(y(t, z^*)) dt .$$

Damit können wir die bisherigen Ergebnisse zusammenfassen in :

Satz (Verzweigungssatz für symmetrische periodische Lösungen)

Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ ungerade, $f(0) = 0$, $f'(0) < 0$ und $x f(x) < 0$ für $x \neq 0$.

Sei $z > 0$ und $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die symmetrische Periode-4-Lösung von

$$\dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1)), \quad \alpha = \alpha(z)$$

mit $x(0) = 0$ und Amplitude $x(1) = z$.

Dann ist z differenzierbarer Verzweigungspunkt, bei dem symmetrische periodische Lösungen vom Kaplan-Yorke-Zweig abzweigen, wenn gilt

$$1. \quad \alpha'(z) \neq 0$$

$$2. \quad \int_0^1 f^2(x) f'(y) dt = 0$$

$$3. \quad \int_0^1 f'(x) f'(y) dt \neq 0$$

(mit $y = x(\cdot - 1)$).

Wir wollen diesen Satz noch geometrisch interpretieren.

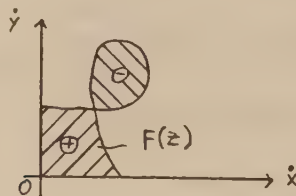
Nach Definition von $r(z)$ können wir die angegebenen Bedingungen auch so schreiben:

$$\alpha'(z) \neq 0, \quad r(z) = 0, \quad r'(z) \neq 0;$$

$r(z)$ ist aber (vgl. Bemerkung zu Satz 7.1) bis auf den Faktor $\frac{1}{2\alpha f(z)}$ gleich dem Flächeninhalt des von der Kurve $(\dot{x}(\cdot, z), \dot{y}(\cdot, z))$ ausgeschnittenen Sektors.

Obige Bedingungen lassen sich also auf folgende Weise geometrisch formulieren:

1. Der Primärzweig von f (genauer: die Projektion von $PZ(f) \subseteq \mathbb{R} \times C_0$ unter $\mathbb{R} \times C_0 \ni (\alpha, \varphi) \mapsto (\alpha, \varphi(1)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) besitzt in z keine vertikale Tangente.
2. die Fläche des von $(\dot{x}(\cdot, z), \dot{y}(\cdot, z))$ ausgeschnittenen Sektors verschwindet, und
3. wird mit Geschwindigkeit $\neq 0$ durchlaufen.



9. Die kanonische Involution

Sei $f \in C^k(\mathbb{R})$ ungerade, $k \in \mathbb{N}_0$, $x f(x) < 0$ für $x \neq 0$ und $F = \int_0^{\cdot} f(u) du$. Für $x > 0$ gilt dann $F(x) < 0$, $F'(x) = f(x) < 0$, d.h. F ist auf $\mathbb{R}_0^+$ streng monoton fallend. Ist also $J = F(\mathbb{R}_0^+)$, so ist $J \subseteq \mathbb{R}_0^-$ und es gibt eine streng monoton fallende, stetige Abbildung $G: J \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit

$$G(F(x)) = x \text{ für } x \geq 0, \quad F(G(y)) = y \text{ für } y \in J.$$

Nach dem Satz über die Umkehrfunktion ist G differenzierbar auf

$$J' = \{y \in J \mid F'(G(y)) \neq 0\} = \{y \in J \mid f(G(y)) \neq 0\} = \{y \in J \mid G(y) \neq 0\} = J \setminus \{0\}.$$

Wir wollen in diesem Abschnitt zwei Hilfsfunktionen ϕ, j konstruieren, die wir im nächsten Abschnitt benötigen werden. Hierbei benutzen wir die Tatsache, daß die Kaplan-Yorke-Gleichungen ein Hamiltonsches System bilden, wovon in der Literatur kaum Gebrauch gemacht wird.

Lemma 9.1

Sei $D = \{(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq z\}$, $D' = \{(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 0 \leq x < z\}$.

Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Abbildung $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit:

$$F(\phi(x, z)) = F(z) - F(x) \text{ für alle } (x, z) \in D,$$

und es gilt:

1. $\phi(0, z) = z$, $\phi(z, z) = 0$ für $z \geq 0$,
2. für $z \in \mathbb{R}_0^+$ ist $\phi(\cdot, z) = ([0, z] \ni x \mapsto \phi(x, z) \in [0, z])$ definiert, streng monoton fallend und involutiv, d.h. $\phi(\cdot, z) \circ \phi(\cdot, z) = \text{id}_{[0, z]}$.
3. für $x \in \mathbb{R}_0^+$ sei $\phi(x, \cdot) = ([x, \infty[\ni z \mapsto \phi(x, z) \in \mathbb{R}_0^+)$; $\phi(x, \cdot)$ ist streng monoton steigend, d.h. für $0 \leq x \leq z_1 < z_2$ gilt: $0 \leq \phi(x, z_1) < \phi(x, z_2) \leq z_2$.
4. ϕ ist stetig und $(k+1)$ -mal stetig differenzierbar auf D' ;

für $(x, z) \in D'$ gilt:

$$\frac{\partial}{\partial z} \phi(x, z) = \frac{f(z)}{f(\phi(x, z))}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \phi(x, z) = -\frac{f(x)}{f(\phi(x, z))};$$

für $z > 0$ gilt:

$$\frac{\partial}{\partial z} \phi(0, z) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial x} \phi(0, z) = 0.$$

Beweis:

Sei $(x, z) \in D$, also $0 \leq x \leq z$ und $0 = F(0) \geq F(x) \geq F(z)$.

Damit ist $F(z) \leq F(z) - F(x) \leq 0$, also $F(z) - F(x) \in [F(z), F(0)] = F([0, z]) \subseteq J$, d.h. $\phi(x, z) = G(F(z) - F(x)) \in \mathbb{R}_0^+$ existiert für alle $(x, z) \in D$, womit $\phi: D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert ist. Offensichtlich ist $F(\phi(x, z)) = F(z) - F(x)$ für $(x, z) \in D$. Sei $\bar{\phi}: D \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ Abbildung mit $F(\bar{\phi}(x, z)) = F(z) - F(x)$ für alle $(x, z) \in D$.

Dann folgt $F(\bar{\phi}(x,z)) = F(\phi(x,z))$, $\phi(x,z), \bar{\phi}(x,z) \in \mathbb{R}_0^+$, und da F auf $\mathbb{R}_0^+$ streng monoton, also injektiv ist, folgt $\bar{\phi}(x,z) = \phi(x,z)$ für alle $(x,z) \in D$, d.h. es ist $\bar{\phi} = \phi$ und ϕ ist eindeutig bestimmt.

1. Es ist $F(\phi(0,z)) = F(z) - F(0) = F(z)$, und wegen $\phi(0,z), z \in \mathbb{R}_0^+$ folgt $\phi(0,z) = z$; entsprechend ist $F(\phi(z,z)) = F(z) - F(z) = 0 = F(0)$ und $\phi(z,z) = 0$ wegen $0, \phi(z,z) \in \mathbb{R}_0^+$.

2. Sei $z \in \mathbb{R}_0^+$; dann gilt $(x,z) \in D$ für alle $x \in [0,z]$, d.h. $\phi(.,z)(x) = \phi(x,z)$ ist für $x \in [0,z]$ definiert.

Da F und G streng monoton fallen, folgt für $0 \leq x_1 < x_2 \leq z$:

$$\begin{aligned} F(0) \geq F(x_1) > F(x_2) \geq F(z) &\Rightarrow 0 \leq -F(x_1) < -F(x_2) \leq -F(z) = \\ &\Rightarrow F(z) \leq F(z) - F(x_1) = F(\phi(x,z_1)) < F(z) - F(x_2) = F(\phi(x,z_2)) \leq 0 = F(0) \Rightarrow \\ &\Rightarrow z \geq \phi(x_1,z) = \phi(.,z)(x_1) > \phi(x_2,z) = \phi(.,z)(x_2) \geq 0, \end{aligned}$$

$\phi(.,z)$ ist also streng monoton fallend; weiter folgt $\phi(.,z)(x) \in [0,z]$ für alle $x \in [0,z]$. Sei $x \in [0,z]$, $y = \phi(.,z)(x)$; dann ist auch

$u = \phi(.,z)(y) = \phi(.,z) \circ \phi(.,z)(x)$ definiert, und es gilt:

$$F(u) = F(\phi(y,z)) = F(z) - F(y) = F(z) - F(\phi(x,z)) = F(z) - F(z) + F(x) = F(x),$$

d.h. es ist $u = x$ und $\phi(.,z)$ ist involutiv.

3. Sei $x \in \mathbb{R}_0^+$. Dann gilt $(x,z) \in D$ für alle $z \in [x, \omega[$, d.h.

$\phi(x,.) (z) = \phi(x,z)$ ist für alle $z \in [x, \omega[$ definiert. Für $x \leq z_1 < z_2$ folgt:

$$\begin{aligned} F(0) \geq F(x) \geq F(z_1) > F(z_2) &\Rightarrow 0 \geq F(z_1) - F(x) > F(z_2) - F(x) \geq F(z_2) = \\ &\Rightarrow 0 \geq F(\phi(x,z_1)) > F(\phi(x,z_2)) \geq F(z_2) \Rightarrow 0 \leq \phi(x,z_1) < \phi(x,z_2) \leq z_2, \end{aligned}$$

d.h. $\phi(x,.)$ ist streng monoton steigend.

4. F und G sind stetig; F ist auf $\mathbb{R}$ und G auf $F(\mathbb{R}^+) = J'$ $(k+1)$ -mal stetig differenzierbar. Also ist ϕ in allen $(x,z) \in D$ $(k+1)$ -mal stetig differenzierbar, in denen $F(z) - F(x) = F(\phi(x,z)) \in F(\mathbb{R}^+)$, d.h. $\phi(x,z) > 0$ ist. Es ist $\phi(x,z) = 0 \Leftrightarrow x = z$, also ist ϕ stetig und auf D' $(k+1)$ -mal differenzierbar.

Aus $F(\phi(x,z)) = F(z) - F(x)$ folgen durch partielle Differentiation die Ausdrücke für $\frac{\partial \phi}{\partial z}(x,z), \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,z), (x,z) \in D'$; dort ist $f(\phi(x,z)) \neq 0$.

Aus $\phi(0,z) = z$ folgt schließlich $\frac{\partial \phi}{\partial z}(0,z) = 1$, wegen $f(0) = 0$ ist $\frac{\partial \phi}{\partial x}(0,z) = 0$ ■

Die Bedeutung von ϕ liegt im folgenden

Lemma 9.2

Sei $z > 0$ und $(x(.,z), y(.,z)): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Kaplan-Yorke Lösung mit Amplitude z . Dann gilt für $t \in [0,1]$: $y(t,z) = -\phi(x(t,z), z)$.

Beweis :

Aus dem Satz von Kaplan und Yorke folgt für $t \in [0,1]$:

$$z \geq x(t,z) \geq 0 \geq y(t,z) \geq -z \quad \text{und} \quad F(x(t,z)) + F(y(t,z)) = F(z) .$$

Da F gerade ist, gilt

$$F(-y(t,z)) = F(y(t,z)) = F(z) - F(x(t,z)) = F(\phi(x(t,z),z)) ,$$

und mit $\phi(x(t,z),z) \geq 0, -y(t,z) \geq 0$ folgt die Behauptung. ■

Im nächsten Lemma machen wir zwei asymptotische Aussagen über $\phi(x, \cdot)$:

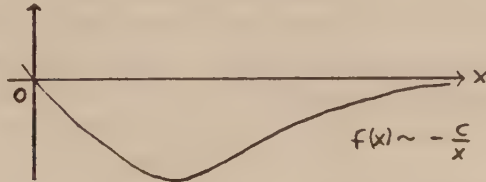
Lemma 9.3

Es gebe $c > 0, \bar{c} \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{x \rightarrow \infty} (F(x) + c \ln x) = \bar{c}$.

Dann gilt für alle $x \geq 0$:

1. $\lim_{x \leq z \rightarrow \infty} \phi(x, z) = \infty$,
2. $\lim_{x \leq z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} \phi(x, z) = e^{\frac{1}{c} F(x)}$.

Weiter gibt es $\hat{c} > 0$ mit $x \phi(x, z) \leq \hat{c} \cdot z$ für $(x, z) \in D$.



Beweis :

1. Andernfalls gibt es ein $C > 0$ und eine Folge $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $x \leq z_k \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$ und $\phi(x, z_k) \leq C$. Da F auf $\mathbb{R}_0^+$ monoton fällt, folgt :

$$0 \geq F(z_k) = F(x) + F(\phi(x, z_k)) \geq F(x) + F(C) ,$$

d.h. $(F(z_k))_{k \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt, in Widerspruch zu $\lim_{z \rightarrow \infty} F(z_k) = -\infty$.

2. Nach Voraussetzung gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $u_\epsilon > 0$ mit

$$|(F(u) + c \ln u) - \bar{c}| < \frac{1}{2} \epsilon \quad \text{für} \quad u \geq u_\epsilon .$$

Sei $x \geq 0$; dann gibt es nach 1. zu $\epsilon > 0$ ein $z_\epsilon \geq u_\epsilon$ mit $\phi(x, z) \geq u_\epsilon$ für alle $z \geq z_\epsilon$.

Sei $z \geq z_\epsilon \geq u_\epsilon$, also $\phi(x, z) \geq u_\epsilon$ und :

$$|F(z) + c \ln z - \bar{c}| < \frac{1}{2} \epsilon , \quad |F(\phi(x, z)) + c \ln \phi(x, z) - \bar{c}| < \frac{1}{2} \epsilon .$$

Es folgt :

$$\begin{aligned}
 |F(x) - c \ln(\frac{1}{2} \phi(x, z))| &= |F(x) - c \ln \phi(x, z) + c \ln z| = \\
 &= |F(x) + F(\phi(x, z)) - [F(\phi(x, z)) + c \ln \phi(x, z) - \bar{c}] + \\
 &\quad + [-\bar{c} + c \ln z + F(z)] - F(z)| \leq \\
 &\leq |F(x) + F(\phi(x, z)) - F(z)| + |F(\phi(x, z)) + c \ln \phi(x, z) - \bar{c}| + \\
 &\quad + |F(z) + c \ln z - \bar{c}| < \\
 &< 0 + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Das bedeutet aber: $\lim_{z \rightarrow \infty} [F(x) - c \ln(\frac{1}{2} \phi(x, z))] = 0$, also existiert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \phi(x, z) = e^{\frac{1}{2} F(x)}.$$

3. Sei $\hat{D} = \{(x, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq z, x \geq 1, \phi(x, z) \geq 1\}$.

Behauptung: Es gibt $\hat{c} > 0$ mit $x \phi(x, z) \leq \hat{c} \cdot z$ für $(x, z) \in \hat{D}$.

Beweis: Nach Voraussetzung gibt es zunächst $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ mit

$$c_1 \leq F(u) + c \ln u \leq c_2 \text{ für alle } u \geq 1.$$

Ist also $(x, z) \in \hat{D}$, so ist $0 \leq x \leq z, z \geq x \geq 1, \phi(x, z) \geq 1$, und

$$\begin{aligned}
 c_1 &\leq F(x) + c \ln x \leq c_2 \\
 c_1 &\leq F(\phi(x, z)) + c \ln \phi(x, z) \leq c_2 \\
 -c_2 &\leq -F(z) - c \ln z \leq -c_1.
 \end{aligned}$$

Addition der drei Zeilen ergibt wegen $F(x) + F(\phi(x, z)) - F(z) = 0$ und

$$\ln x + \ln \phi(x, z) - \ln z = \ln \frac{x \phi(x, z)}{z} :$$

$$2c_1 - c_2 \leq c \ln \frac{x \phi(x, z)}{z} \leq 2c_2 - c_1,$$

somit ist $\frac{x \phi(x, z)}{z}$ auf $\hat{D}$ nach oben beschränkt durch ein $\hat{c} > 0$ und es gilt:

$$x \phi(x, z) \leq \hat{c} z \text{ für } (x, z) \in \hat{D}.$$

Sei nun o.B. $\hat{c} \geq 1$ und $(x, z) \in \hat{D}$, also $0 \leq x \leq z$.

Ist $x < 1$, so gilt $x \phi(x, z) \leq \phi(x, z) \leq z \leq \hat{c} \cdot z$;

ist $\phi(x, z) < 1$, so gilt $x \phi(x, z) \leq x \leq z \leq \hat{c} \cdot z$;

und ist $x \geq 1$ und $\phi(x, z) \geq 1$, so ist $(x, z) \in \hat{D}$ und ebenfalls $x \phi(x, z) \leq \hat{c} \cdot z$. ■

Lemma 9.4

Es gilt genau eine Abbildung $j: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $F(j(z)) = \frac{1}{2} F(z)$ für $z \geq 0$, und es gilt:

1. j ist stetig, $(k+1)$ -mal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^+$ und streng monoton steigend.

2. $j'(z) = \frac{1}{2} \frac{F'(z)}{F'(j(z))}$ für $z > 0$, $j(0) = 0$.

3. $j(z)$ ist für alle $z > 0$ der einzige Fixpunkt von $\phi(\cdot, z)$ in $[0, z]$:

$$\Phi(j(z), z) = j(z) < z,$$

4. für die Kaplan-Yorke Lösung $(x(\cdot, z), y(\cdot, z))$ gilt:

$$x(\frac{1}{2}, z) = -y(\frac{1}{2}, z) = j(z), \quad z \geq 0,$$

5. gibt es $c > 0, \bar{c} \in \mathbb{R}$ mit $\lim_{x \rightarrow \infty} (F(x) + c \ln x) = \bar{c}$, so gilt:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} j(z) = \infty, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{j(z)}{\sqrt{z}} = e^{\bar{c}/2c}.$$

Beweis:

Sei $J = F(\mathbb{R}_0^+) \subseteq \mathbb{R}_0^+, G = F^{-1}: J \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ wie zuvor.

1. Dann ist $j(z) = G(\frac{1}{2}F(z)), z \geq 0$ eindeutig definiert, stetig und streng monoton steigend sowie $(k+1)$ -mal stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}^+$.

2. Aus $F(j(z)) = \frac{1}{2}F(z)$ folgt $f(j(z))j'(z) = \frac{1}{2}f(z)$ für $z > 0$.

Speziell ist $j(0) = 0$.

3. Es ist $F(\Phi(j(z), z)) = F(z) - F(j(z)) = F(z) - \frac{1}{2}F(z) = \frac{1}{2}F(z) = F(j(z))$, d.h. es ist $\Phi(j(z), z) = j(z)$ für $z \geq 0$. Da $\Phi(\cdot, z)$ streng monoton fallend ist, besitzt $\Phi(\cdot, z)$ genau einen Fixpunkt in $[0, z]$.

4. Wegen $x(\frac{1}{2}, z) = -y(\frac{1}{2}, z)$ folgt aus dem Satz von Kaplan und Yorke:

$$2F(j(z)) = F(z) = F(x(\frac{1}{2}, z)) + F(y(\frac{1}{2}, z)) = 2F(x(\frac{1}{2}, z)).$$

5. Ist $\lim_{z \rightarrow \infty} j(z) = \infty$ falsch, so gibt es $C > 0$ und eine Folge $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit $0 \leq z_k \rightarrow \infty$ für $k \rightarrow \infty$ und $0 \leq j(z_k) \leq C$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Da F auf $\mathbb{R}_0^+$ monoton fällt, folgt dann aber: $0 \geq F(z_k) = 2F(j(z_k)) \geq 2F(C)$, d.h. $(F(z_k))_{k \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt in Widerspruch zu $F(z_k) \rightarrow -\infty$ für $k \rightarrow \infty$.

Damit gilt für $z \rightarrow \infty$:

$$F(z) + c \ln z \rightarrow \bar{c}, \quad F(j(z)) + c \ln j(z) = \frac{1}{2}F(z) + c \ln j(z) \rightarrow \bar{c},$$

also $F(z) + 2c \ln j(z) \rightarrow 2\bar{c}$ und somit:

$$2c \ln j(z) - c \ln z = c \ln \frac{j^2(z)}{z} \rightarrow \bar{c} \quad \text{bzw.} \quad \frac{j^2(z)}{z} \rightarrow e^{\bar{c}/c}.$$

Wir wollen nun die Funktionen Φ und j in Zusammenhang bringen mit α :

Lemma 9.5

1. Für $z > 0$ gilt $\alpha(z) = -2 \int_0^{j(z)} \frac{dx}{f(\Phi(x, z))}$

und

$$\alpha'(z) = f(z) \left[-\frac{1}{f^2(j(z))} + 2 \int_0^{j(z)} \frac{f'}{f^3}(\Phi(x, z)) dx \right].$$

2. Sei zusätzlich $\lim_{x \rightarrow \infty} x f(x) = -c$ für ein $c > 0$.

Dann gilt:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\alpha(z)}{z \ln z} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \left[\frac{\alpha(z)}{z} - \ln z \right] \text{ existiert.}$$

Beweis :

1. Mit Lemma 9.2 gilt für die Kaplan-Yorke Lösung $(x(.,z), y(.,z))$:

$$y(t,z) = -\phi(x(t,z), z) \quad \text{für } t \in [0,1], \quad z > 0.$$

Aus $\dot{x}(t,z) = \alpha(z) f(y(t,z)) = -\alpha(z) f(\phi(x(t,z), z))$ erhalten wir somit mit der Substitution $u = x(.,z)$:

$$\alpha(z) t = - \int_0^{x(t,z)} \frac{du}{f(\phi(u,z))},$$

und wegen $x(1,z) = j(z)$ folgt die Behauptung für $\alpha(z)$.

Weiter gilt $(x,z) \in D'$ für $z > 0, x \in [0, j(z)]$ und somit :

$$\begin{aligned} \alpha'(z) &= -2 \frac{d}{dz} \int_0^{j(z)} \frac{dx}{f(\phi(x,z))} = -2 j'(z) \cdot \frac{1}{f(\phi(j(z), z))} - 2 \int_0^{j(z)} \frac{\partial}{\partial z} \frac{dx}{f(\phi(x,z))} = \\ &= -2 \frac{j'(z)}{f(j(z))} - 2 \int_0^{j(z)} \left[-\frac{f'(\phi(x,z))}{f^2(\phi(x,z))} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial z}(x,z) \right] dx = \\ &= -2 \cdot \frac{1}{2} \frac{f(z)}{f^2(j(z))} + 2 \int_0^{j(z)} \frac{f'(\phi(x,z))}{f^2(\phi(x,z))} \cdot \frac{f(z)}{f(\phi(x,z))} dx = \\ &= f(z) \left[-\frac{1}{f^2(j(z))} + 2 \int_0^{j(z)} \frac{f'}{f^3}(\phi(x,z)) dx \right]. \end{aligned}$$

Wegen $j(z) < z$ werden dabei die Integranden nicht singulär.

2. Wir werden die asymptotische Aussage $\alpha(z) \sim z \ln z + \text{const.}$ nicht benutzen, und verzichten daher auf einen Beweis. Es sei aber auf [15] verwiesen. ■

Damit können wir Bereiche mit $\alpha'(z) > 0$ konstruieren :

Lemma 9.6

Sei f in $[x_1, x_2[$ monoton steigend, $0 < x_1 < x_2 \leq \infty$.

Es gebe $x_3 \in [x_1, x_2[$ mit $j(x_3) = x_1$ (d.h. $2F(x_1) = F(x_3)$).

Dann ist $\alpha'(z) > 0$ für $z \in [x_3, x_2[$.

Beweis :

Sei $x_3 \leq z < x_2$ und $x \in [0, j(z)]$, also $0 \leq x \leq j(z) < z$ und

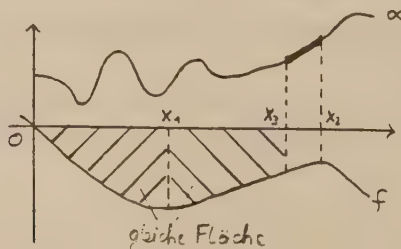
$$x_2 > z \geq \phi(x,z) \geq \phi(j(z), z) = j(z) \geq j(x_3) = x_1,$$

d.h. es ist $\phi(x,z) \in [x_1, x_2[$. Da f hier monoton steigt, ist $f'(\phi(x,z)) \geq 0$.

Wegen $f(\phi(x,z)) < 0$ folgt :

$$-\frac{1}{f^2(j(z))} + 2 \int_0^{j(z)} \frac{f'}{f^3}(\phi(x,z)) dx < 0,$$

wegen $f(z) < 0$ ist somit $\alpha'(z) > 0$. ■



10. Existenz eines Verzweigungspunktes

Seien f, F, ϕ und j wie in Abschnitt 9.

Sei $(x(.,z), y(.,z))$ weiter die Kaplan-Yorke-Lösung, also

$$\dot{x} = \alpha f(y) \quad , \quad x(0,z) = 0 \quad , \quad x(1,z) = z$$

$$\dot{y} = -\alpha f(x) \quad , \quad y(0,z) = -z \quad , \quad y(1,z) = 0$$

mit $\alpha = \alpha(z), z > 0$.

Sei
$$I(z) = \int_0^1 f'(x(t,z)) f'(y(t,z)) dt \quad ,$$

$$J(z) = \int_0^1 f'(x(t,z)) f'(y(t,z)) dt \quad .$$

Mit dem Verzweigungssatz für symmetrische periodische Lösungen aus Abschnitt 8 ist dann $z^* > 0$ differenzierbarer Verzweigungspunkt, wenn gilt:

$$I(z^*) = 0 \quad , \quad J(z^*) \neq 0 \quad , \quad \alpha'(z^*) \neq 0 \quad .$$

Wir geben nun Bedingungen an, daß I eine Nullstelle besitzt:

Satz 10.1

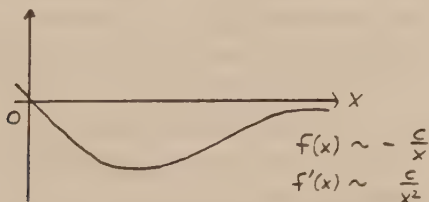
Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ ungerade mit $f(0) = 0, f'(0) < 0$ und $x f(x) < 0$ für $x \neq 0$.

Es gebe $c > 0, \bar{c} \in \mathbb{R}$ mit

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\int_0^x f(u) du + c \ln x \right) = \bar{c} \quad ,$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} -x f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 f'(x) = c \quad .$$

Dann gibt es $z^* > 0$ mit $I(z^*) = 0$.



Beweis :

a. Sei $\tilde{I}(z) = \int_0^z f'(x) f(\phi(x,z)) dx$. Dann gilt $\tilde{I}(z) = -\alpha(z) I(z)$ für $z > 0$, denn mit Lemma 9.2 ist $y(t,z) = -\phi(x(t,z), z)$ für $t \in [0,1]$, und die Substitution $u = x(.,z), y(.,z) = -\phi(u,z), du = \alpha f(y(.,z)) dt$ in $I(z)$ ergibt:

$$\begin{aligned} I(z) &= \int_0^1 f'(x(t,z)) f(y(t,z)) \cdot \frac{1}{\alpha} \alpha f(y(t,z)) dt = \\ &= \int_{x(0,z)}^{x(1,z)} f'(u) f(\phi(u,z)) \cdot \frac{1}{\alpha} du = -\frac{1}{\alpha} \int_0^z f'(u) f(\phi(u,z)) du = \\ &= -\frac{1}{\alpha} \tilde{I}(z). \end{aligned}$$

Wir zeigen daher, daß es $z^* > 0$ mit $\tilde{I}(z^*) = 0$ gibt.

b. Wegen 1. und Lemma 9.3 gibt es $\hat{c} > 0$ mit $x \phi(x,z) \leq \hat{c} \cdot z$ für alle $0 \leq x \leq z$.

Wegen 2. gibt es $\bar{x} > 0$ mit

$$\frac{c}{2} \leq -x f(x) \leq \frac{3}{2} c, \quad x^2 f'(x) \geq \frac{1}{2} c \quad \text{für } x \geq \bar{x}.$$

Insbesondere ist $f'(x) > 0$ für $x \geq \bar{x}$, d.h. f ist auf $[\bar{x}, \infty[$ monoton steigend.

Wegen $\phi(\bar{x}, \bar{x}) = 0$, $\phi(\bar{x}, z) \rightarrow \infty$ für $z \rightarrow \infty$ gibt es $\bar{z} > \bar{x}$ mit $\phi(\bar{x}, \bar{z}) = \bar{x}$ (also $j(\bar{z}) = \bar{x}$), und für $z \geq \bar{z}$ ist $\phi(\bar{x}, z) \geq \bar{x}$.

c. $\tilde{I}$ ist stetig, $\tilde{I}(0) = 0$. Wegen $f'(0) < 0$ gibt es $\varepsilon > 0$ mit $f'(x) < 0$ für $0 \leq x < \varepsilon$. Sei $0 < z < \varepsilon$ und $x \in [0, z]$. Dann ist $f'(x) < 0$, $f(\phi(x, z)) \leq 0$ und somit $f'(x) f(\phi(x, z)) \geq 0$.

Da $f'(0) f(\phi(0, z)) = f'(0) f(z) > 0$ ist, folgt also $\tilde{I}(z) > 0$ für $0 < z < \varepsilon$.

Wir müssen also zeigen, daß $\tilde{I}$ auch negative Werte annimmt.

Dazu sei für $z \geq \bar{x}$: $\tilde{I}_1(z) = \int_0^{\bar{x}} f'(x) f(\phi(x, z)) dx$,

$$\tilde{I}_2(z) = - \int_{\bar{x}}^z f'(x) f(\phi(x, z)) dx,$$

also $\tilde{I}(z) = \tilde{I}_1(z) - \tilde{I}_2(z)$.

d. Behauptung: Es gibt $c' > 0$ mit $z \tilde{I}_1(z) \leq c'$ für alle $z \geq \bar{x}$.

Beweis: Es genügt, die Behauptung für $z \geq \bar{z}$ zu zeigen.

Zunächst gilt: $[0, \bar{x}] \ni x \mapsto -f(\phi(x, z)) \in \mathbb{R}$ ist für $z \geq \bar{z}$ monoton steigend und positiv:

Sei $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \bar{x}$; da $\phi(\cdot, z)$ monoton fällt, gilt:

$$z = \phi(0, z) \geq \phi(x_1, z) \geq \phi(x_2, z) \geq \phi(\bar{x}, z) \geq \bar{x};$$

da f auf $[\bar{x}, \infty[$ monoton steigt, also $-f$ monoton fällt, folgt

$-f(\phi(x_1, z)) \leq -f(\phi(x_2, z))$, also die Behauptung.

Nach einer Version des Mittelwertsatzes (Lemma 14.1) gibt es somit $\xi \in [0, \bar{x}]$ mit:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_1(z) &= \int_0^{\bar{x}} [-f'(x)] [-f(\phi(x, z))] dx = -f(\phi(\bar{x}, z)) \cdot \int_0^{\bar{x}} [-f'(x)] dx = \\ &= f(\phi(\bar{x}, z)) [f(\bar{x}) - f(\xi)] = f(\phi(\bar{x}, z)) f(\bar{x}) - f(\phi(\bar{x}, z)) f(\xi) \leq \end{aligned}$$

$$\leq f(\phi(\bar{x}, z)) f(\bar{x}) = - \frac{f(\bar{x})}{\phi(\bar{x}, z)} \cdot [-\phi(\bar{x}, z) f(\phi(\bar{x}, z))] .$$

Wegen $\phi(\bar{x}, z) \geq \bar{x}$ ist aber $-\phi(\bar{x}, z) f(\phi(\bar{x}, z)) \leq \frac{3}{2} c$ und wegen $-\frac{f(\bar{x})}{\phi(\bar{x}, z)} > 0$ folgt :

$$z \tilde{I}_1(z) \leq - \frac{z}{\phi(\bar{x}, z)} f(\bar{x}) [-\phi(\bar{x}, z) f(\phi(\bar{x}, z))] \leq - \frac{3}{2} c f(\bar{x}) \frac{z}{\phi(\bar{x}, z)} .$$

Mit Lemma 9.3(2) existiert aber $\lim_{\bar{x} < z \rightarrow \infty} \frac{z}{\phi(\bar{x}, z)} = e^{-\frac{1}{c} F(\bar{x})}$; also gibt es $c'' > 0$ mit $\frac{z}{\phi(\bar{x}, z)} \leq c''$ für $z \geq \bar{z}$, und die Behauptung folgt für $c' = -\frac{3}{2} c c'' f(\bar{x})$.

e. Behauptung : $\lim_{z \rightarrow \infty} z \tilde{I}_2(z) = +\infty$.

Beweis : Sei $z \geq \bar{z}$ und $x \in [\bar{x}, z]$; dann ist $f'(x) > 0$, $-f(\phi(x, z)) > 0$, also $-f'(x) f(\phi(x, z)) > 0$ und somit $\tilde{I}_2(z) > 0$ bzw.

$$\tilde{I}_2(z) = \left(\int_{\bar{x}}^{\phi(\bar{x}, z)} + \int_{\phi(\bar{x}, z)}^z \right) [-f'(x) f(\phi(x, z))] dx \geq - \int_{\bar{x}}^{\phi(\bar{x}, z)} f'(x) f(\phi(x, z)) dx$$

Sei $x \in [\bar{x}, \phi(\bar{x}, z)]$, also $\bar{x} \leq x \leq \phi(\bar{x}, z) \leq z$.

Dann folgt $\phi(\bar{x}, z) \geq \phi(x, z) \geq \phi(\phi(\bar{x}, z), z) = \bar{x}$, also ist

$$-\phi(\bar{x}, z) f(\phi(\bar{x}, z)) \geq \frac{c}{2}, \quad x^2 f'(x) \geq \frac{c}{2}$$

und

$$\begin{aligned} z \tilde{I}_2(z) &\geq \int_{\bar{x}}^{\phi(\bar{x}, z)} z f'(x) [-f(\phi(x, z))] dx = \\ &= \int_{\bar{x}}^{\phi(\bar{x}, z)} \frac{z}{x} \cdot x^2 f'(x) \cdot \frac{-\phi(x, z) f(\phi(x, z))}{\phi(x, z)} \frac{dx}{x} \geq \\ &\geq \int_{\bar{x}}^{\phi(\bar{x}, z)} \frac{z}{x \phi(x, z)} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{dx}{x} . \end{aligned}$$

Mit a. und Lemma 9.3(1) folgt somit :

$$z \tilde{I}_2(z) \geq \frac{c^2}{4c} \int_{\bar{x}}^{\phi(\bar{x}, z)} \frac{dx}{x} = \frac{c^2}{4c} \ln \frac{\phi(\bar{x}, z)}{\bar{x}} \rightarrow \infty \text{ für } z \rightarrow \infty .$$

f. Insgesamt ist also $\lim_{z \rightarrow \infty} z I(z) = -\infty$, woraus die Behauptung des Satzes folgt ■

Corollar 10.1

Die Nullstellen von I sind nach oben beschränkt.

Beweis :

Sonst gibt es $z_k \rightarrow \infty$ mit $z_k \tilde{I}(z_k) = 0$ in Widerspruch zu $z_k \tilde{I}(z_k) \rightarrow -\infty$. ■

Lemma 10.1

Sei $f \in C^1(\mathbb{R})$ ungerade mit $f(0) = 0$, $f'(0) < 0$ und $xf(x) < 0$ für $x \neq 0$.

Sei $\frac{f''}{f^2}$ auf $\mathbb{R}^+$ monoton.

Sei $0 \leq z_1 < z_2$, $x_1 = j(z_1)$, $x_2 = j(z_2)$ und $f'(x) \leq 0$ für $x \in [x_1, x_2]$.

Dann ist $I(z) < 0$ für $z \in]z_1, z_2]$.

Beweis :

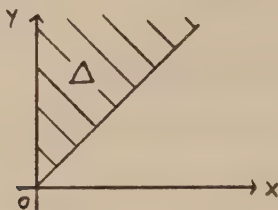
a. Sei $g: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto f''(x) f^3(y) - f''(y) f^3(x) \in \mathbb{R}$. Dann gilt :

$$g(0, y) = g(x, 0) = g(x, x) = 0, \quad g(-x, y) = g(x, -y) = g(y, x) = -g(x, y)$$

für $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Behauptung : g ändert auf $\Delta := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq y\}$ nicht das Vorzeichen,

d.h. es ist $g|_{\Delta} \geq 0$ oder $g|_{\Delta} \leq 0$.



Beweis : Sonst gibt es $(x', y'), (x'', y'') \in \Delta$ mit $g(x', y') < 0 < g(x'', y'')$, und es ist $0 \leq x' \leq y', 0 \leq x'' \leq y''$ sowie $x' \neq 0, y' \neq x'$ (sonst ist $g(x', y') = 0$), also $0 < x' < y'$ und entsprechend $0 < x'' < y''$.

Wegen $f(x') < 0, f(y') < 0$ folgt :

$$\begin{aligned} 0 > g(x', y') &= f''(x') f^3(y') - f''(y') f^3(x') \implies \\ &\implies f''(y') f^3(x') > f''(x') f^3(y') \implies \frac{f''(y')}{f^3(y')} > \frac{f''(x')}{f^3(x')} . \end{aligned}$$

Analog :

$$\begin{aligned} 0 < g(x'', y'') &= f''(x'') f^3(y'') - f''(y'') f^3(x'') \implies \\ &\implies f''(y'') f^3(x'') < f''(x'') f^3(y'') \implies \frac{f''(y'')}{f^3(y'')} < \frac{f''(x'')}{f^3(x'')} . \end{aligned}$$

Ist nun $\frac{f''}{f^3}$ auf $\mathbb{R}^+$ monoton steigend, so würde aus $0 < x' < y''$ folgen :

$$\frac{f''(x'')}{f^3(x'')} \leq \frac{f''(y'')}{f^3(y'')} ;$$

ist $\frac{f''}{f^3}$ auf $\mathbb{R}^+$ monoton fallend, so würde aus $0 < x' < y'$ folgen :

$$\frac{f''(x')}{f^3(x')} \geq \frac{f''(y')}{f^3(y')} ;$$

beides ist ein Widerspruch.

b. Sei $I(t, z) = [f'(x) f^2(y) + f'(y) f^2(x)](t, z)$; dann gilt mit der 1. Vorbemerkung zu Lemma 8.3 :

$$I(z) = \frac{1}{2} \int_0^1 I(t, z) dt ;$$

und $I(t, z)$ ist invariant unter $t \mapsto 1-t$, d.h. $I(t, z) = I(1-t, z)$.

Das bedeutet aber :

$$I(z) = \int_0^{\frac{1}{2}} I(t, z) dt .$$

Bezeichnet $\dot{I}(t, z)$ die partielle Ableitung nach t , so gilt (ohne Argumente):

$$\begin{aligned}\dot{I} &= [f''(x)f^2(y) + 2f'(y)f'(x)f(x)]\dot{x} + [2f'(x)f'(y)f(y) + f''(y)f^2(x)]\dot{y} = \\ &= f''(x)f^2(y)\dot{x} + f''(y)f^2(x)\dot{y} + 2f'(x)f'(y)[f(x)\dot{x} + f(y)\dot{y}] = \\ &= \alpha[f''(x)f^3(y) - f''(y)f^3(x)] + 0 = \\ &= \alpha g(x, y).\end{aligned}$$

c. Es ist $I(0, z) = f'(0)f^2(z) < 0$ für $z > 0$. Ist $z \in [z_1, z_2]$, so ist $j(z) \in [x_1, x_2]$, also $f'(j(z)) \leq 0$. Wegen $x(\frac{1}{2}, z) = -y(\frac{1}{2}, z) = j(z)$ folgt

$$I(\frac{1}{2}, z) = 2f'(j(z))f^2(j(z)) \leq 0.$$

Sei $t \in [0, \frac{1}{2}]$; da $x+y$ auf $[0, 1]$ streng monoton steigt, gilt:

$$-z = x(0, z) + y(0, z) \leq x(t, z) + y(t, z) \leq x(\frac{1}{2}, z) + y(\frac{1}{2}, z) = 0,$$

also $0 \leq x(t, z) \leq -y(t, z)$ bzw. $(x(t, z), -y(t, z)) \in \Delta$, d.h.

$$\dot{I}(t, z) = \alpha g(x(t, z), y(t, z)) = -\alpha g(x(t, z), -y(t, z))$$

ändert für $t \in [0, \frac{1}{2}]$ nicht das Vorzeichen.

Somit ist $I(\cdot, z)$ auf $[0, \frac{1}{2}]$ monoton. Wegen $I(0, z) \leq 0$, $I(\frac{1}{2}, z) \leq 0$ ist daher $I(t, z) \leq 0$ für alle $t \in [0, \frac{1}{2}]$, also $I(z) < 0$ wegen $I(0, z) < 0$. ■

Wir können also Bereiche konstruieren, für die $I(z) \neq 0$ ist, also sicher kein Verzweigungspunkt vorliegt. Als Nächstes geben wir Bedingungen für $J(z) \neq 0$ an:

Lemma 10.2

Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ ungerade mit $f(0) = 0$, $f'(0) < 0$ und $xf(x) < 0$ für $x \neq 0$.

Es gebe $c > 0$, $\bar{z} > \bar{x} > 0$ und $\hat{z} > 0$ mit:

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} xf(x) = -c$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 f'(x) = c$,
- $f'(x) > 0$ für $x > \bar{x}$ und $f'(\bar{x}) = 0$,
- f'' besitze genau die positive Nullstelle $\hat{z} > 0$,
- $\frac{f'}{f^2}$ ist auf $\mathbb{R}^+$ streng monoton steigend und $\frac{f'}{f^2}(\hat{z}) \neq \frac{1}{2c}$, $\frac{f'}{f^2}(\bar{z}) \geq \frac{1}{2c}$,
und es ist $j(\bar{z}) = \bar{x}$,
- die auf $\mathbb{R}^+ \setminus \{\hat{z}\}$ definierte Abbildung $\frac{f^2}{f''} - 2c \frac{f f'}{f''}: \mathbb{R}^+ \setminus \{\hat{z}\} \rightarrow \mathbb{R}$
ist injektiv.

Dann sind $I(z)$ und $J(z)$ für $z > \bar{z}$ nicht gleichzeitig Null.



Beweis :

Wir zeigen $I(z) - cJ(z) > 0$ für $z > \bar{z}$, woraus die Behauptung folgt.

1. Sei $b = f^2 - 2cf': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt :

a. b ist stetig und stetig differenzierbar, gerade, $b(0) = -2cf'(0) > 0$.

b. Es ist $\frac{f'}{f^2}(\bar{x}) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'}{f^2}(x) = \frac{1}{c}$, und da $\frac{f'}{f^2}$ auf $\mathbb{R}^+$ streng monoton steigt, gibt es genau ein $\bar{z} > \bar{x}$ mit $\frac{f'}{f^2}(\bar{z}) = \frac{1}{2c}$.

Dann ist $b(\bar{z}) = 0$ und nach Voraussetzung $\bar{z} \neq \bar{x}$, $\bar{z} > \bar{z}$.

Weiter ist $\bar{z}$ die einzige Nullstelle von b in $\mathbb{R}_0^+$.

c. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 b(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} [(x f(x))^2 - 2cx^2 f'(x)] = c^2 - 2c^2 = -c^2 < 0$.

d. Es ist $b(x) > 0$ für $0 \leq x < \bar{z}$ und $b(x) < 0$ für $x > \bar{z}$, denn es gilt : $b(0) > 0$, $b(\bar{z}) = 0$, also $b(x) > 0$ für $0 \leq x < \bar{z}$; wäre $b(x') > 0$ für ein $x' > \bar{z}$, so gäbe es nach c. ein $x'' > x'$ mit $b(x'') < 0$, also auch ein $x''' > x' > \bar{z}$ mit $b(x''') = 0$ in Widerspruch zu b.

e. für alle $z > \bar{z}$ ist $f'(j(z)) [f^2(j(z)) + b(j(z))] > 0$, denn :

$z > \bar{z} \implies j(z) > j(\bar{z}) = \bar{x} \implies f'(j(z)) > 0$; es genügt also zu zeigen :

$$0 < f^2(j(z)) + b(j(z)) = 2f^2(j(z)) - 2cf'(j(z)),$$

d.h. $\frac{f'}{f^2}(j(z)) < \frac{1}{c}$ für $z > \bar{z}$.

Es ist aber $\frac{f'}{f^2}(x) < \frac{1}{c}$ für alle $x > 0$, da $\frac{f'}{f^2}$ streng monoton steigt und $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'}{f^2}(x) = \frac{1}{c}$ gilt.

2. Sei $h: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \mapsto f''(x)f(y)b(y) - f''(y)f(x)b(x) \in \mathbb{R}$.

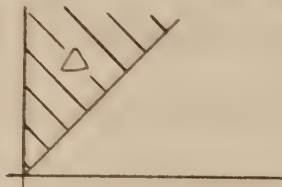
a. Wegen $f(0) = f''(0) = 0$ gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

$$h(0, y) = h(x, 0) = h(x, x) = 0;$$

da f, f'' ungerade, b gerade ist, gilt weiter :

$$h(-x, y) = h(x, -y) = h(y, x) = -h(x, y).$$

b. Sei $\Delta = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq y \}$.



Dann ändert h auf Δ nicht das Vorzeichen :

Beweis : Andernfalls gibt es $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \Delta$ mit

$$h(x_1, y_1) < 0 < h(x_2, y_2).$$

Dann gilt $0 \leq x_1 \leq y_1$ und $x_1 \neq 0, x_1 \neq y_1$, also $0 < x_1 < y_1$, da sonst $h(x_1, y_1) = 0$ wäre. Entsprechend ist $0 < x_2 < y_2$.

Sei $\varphi = ([0, 1] \ni t \mapsto ((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R})$,

also $\varphi(0) = (x_1, y_1)$, $\varphi(1) = (x_2, y_2)$ und

$$0 < (1-t)x_1 + tx_2 < (1-t)y_1 + ty_2 \text{ für alle } t \in [0, 1].$$

Wegen $h(\varphi(0)) < 0 < h(\varphi(1))$ gibt es $t^* \in]0, 1[$ mit $h(\varphi(t^*)) = 0$.

Sei $(x, y) = \varphi(t^*)$, also $0 < x < y$, $h(x, y) = 0$, bzw.

$$f''(x) f(y) b(y) = f''(y) f(x) b(x).$$

Behauptung: Es ist $x \neq \hat{z}$.

Ist $x = \hat{z}$, so ist $f''(x) = 0$, also $f(\hat{z}) b(\hat{z}) f''(y) = 0$. Nun ist aber $f(\hat{z}) \neq 0$, $\hat{z} \neq \hat{z}$, also $b(\hat{z}) \neq 0$ und somit $f''(y) = 0$. Nach Voraussetzung folgt $y = \hat{z} = x$ in Widerspruch zu $x < y$.

Behauptung: Es ist $y \neq \hat{z}$.

Ist $y = \hat{z}$, so ist $f''(y) = 0$, also $f''(x) f(\hat{z}) b(\hat{z}) = 0$, und wie zuvor $f''(x) = 0$ und $x = \hat{z} = y$.

Da $x, y > 0$ ist und f'' in $\mathbb{R}^+$ nur die Nullstelle $\hat{z}$ besitzt, folgt $f''(x) \neq 0$, $f''(y) \neq 0$. Damit gilt:

$$\frac{f(y) b(y)}{f''(y)} = \frac{f(x) b(x)}{f''(x)}$$

Nach Voraussetzung ist aber $\frac{fb}{f''} = \frac{f^2}{f''} - 2c \frac{ff'}{f''}$ injektiv, also ist $x = y$ in Widerspruch zu $x < y$.

3. Wir hatten in Beweisteil b. von Lemma 10.1 bemerkt, daß gilt:

$$I(z) = \int_0^1 [f'(x) f^2(y) + f'(y) f^2(x)](t, z) dt.$$

Da auch der Integrand von $J(z)$ invariant unter $t \mapsto 1-t$ ist, gilt analog:

$$J(z) = 2 \int_0^1 f'(x(t, z)) f'(y(t, z)) dt.$$

Ist also $J(t, z) = [f'(x) f^2(y) + f'(y) f^2(x) - 2c f'(x) f'(y)](t, z)$, so gilt:

$$I(z) - c J(z) = \int_0^1 J(t, z) dt.$$

Mit $\dot{x} = \alpha f(y)$, $\dot{y} = -\alpha f(x)$ folgt:

$$\begin{aligned} \dot{J} &= [f''(x) f^2(y) + 2 f'(y) f'(x) f(x) - 2c f''(x) f'(y)] \dot{x} + \\ &\quad + [2 f'(x) f'(y) f(y) + f''(y) f^2(x) - 2c f'(x) f''(y)] \dot{y} = \\ &= f''(x) [f^2(y) - 2c f'(y)] \dot{x} + f''(y) [f^2(x) - 2c f'(x)] \dot{y} + \\ &\quad + 2 f'(x) f'(y) [f(x) \dot{x} + f(y) \dot{y}] = \end{aligned}$$

$$= f''(x) b(y) \cdot \alpha f(y) - f''(y) b(x) \cdot \alpha f(x) + 0 = \\ = \alpha h(x, y).$$

4. Es ist mit Lemma 9.4(4)

$$J(0, z) = f'(0) f^2(z) - 2c f'(0) f'(z) = f'(0) b(z);$$

$$J(\frac{1}{2}, z) = 2 f'(j(z)) f^2(j(z)) - 2c f'(j(z)) = f'(j(z)) [f^2(j(z)) + b(j(z))].$$

Ist also $z > \bar{z}$, so ist mit 1.d.e wegen $z > \bar{z} > \tilde{z}$:

$$J(0, z) > 0 \text{ da } f'(0) < 0, b(z) < 0, \text{ und } J(\frac{1}{2}, z) > 0.$$

Damit genügt es zu zeigen, daß $J(., z)$ auf $[0, \frac{1}{2}]$ monoton ist, d.h. $\dot{J}(., z)$ auf $[0, \frac{1}{2}]$ nicht das Vorzeichen wechselt, denn dann ist $J(t, z) > 0$ für alle $t \in [0, \frac{1}{2}]$ und $I(z) - c J(z) > 0$.

Für $t \in [0, \frac{1}{2}]$ gilt aber (vgl. Beweisteil c. von Lemma 10.1)

$$0 \leq x(t, z) \leq -y(t, z), \text{ also } (x(t, z), -y(t, z)) \in \Delta.$$

Ist etwa (nach 2b.) $h|_{\Delta} \geq 0$, so folgt:

$$\dot{J}(t, z) = \alpha h(x, y) = -\alpha h(x, -y) \leq 0;$$

entsprechend $\dot{J}(t, z) \geq 0$ falls $h|_{\Delta} \leq 0$.

Also ändert $\dot{J}(., z)$ auf $[0, \frac{1}{2}]$ nicht das Vorzeichen. ■

Damit sind wir nun in der Lage, Bedingungen an f zu stellen, aus denen die Existenz eines differenzierbaren Verzweigungspunktes folgt.

Das Hauptergebnis dieser Arbeit lautet:

Satz 10.2

Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ ungerade mit $f(0) = 0, f'(0) < 0$ und $xf(x) < 0$ für $x \neq 0$.

Es gebe $0 < \bar{x} < \bar{z}, \bar{z} > 0, c > 0$ und $\bar{c} \in \mathbb{R}$ mit:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x f(u) du + c \ln x = \bar{c},$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -x f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 f'(x) = c,$$

$$2. f'(x) > 0 \text{ für } x > \bar{x}, f'(x) \leq 0 \text{ für } 0 \leq x \leq \bar{x},$$

$$3. \frac{f''}{f^3} \text{ ist auf } \mathbb{R}^+ \text{ monoton, } \frac{f'}{f^2} \text{ auf } \mathbb{R}^+ \text{ streng monoton steigend,}$$

$$4. f'' \text{ hat in } \mathbb{R}^+ \text{ genau die Nullstelle } \hat{z},$$

$$5. \text{ Es ist } 2 \cdot \int_0^{\bar{x}} f(u) du = \int_0^{\bar{z}} f(u) du \text{ und } \frac{f'(\bar{z})}{f^2(\bar{z})} \geq \frac{1}{2c}, \frac{f'(\hat{z})}{f^2(\hat{z})} = \frac{1}{2c},$$

$$6. \text{ die Abbildung } \frac{f''}{f^3} - 2c \frac{f f'}{f^4} : \mathbb{R}^+ \setminus \{\hat{z}\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ ist injektiv.}$$

Dann gibt es auf dem Kaplan-Yorke-Zweig von

$$\dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1))$$

einen differenzierbaren Verzweigungspunkt, bei dem symmetrische periodische Lösungen abzweigen.

Beweis :

Wegen 1. und 2. gibt es nach Satz 10.1 ein $z^* > 0$ mit $I(z^*) = 0$, und wir müssen $J(z^*) \neq 0$, $\alpha'(z^*) \neq 0$ zeigen.

Dazu wenden wir Lemma 10.1 an auf $z_1 = 0, z_2 = \bar{z}, x_1 = 0, x_2 = \bar{x}$.

Es ist $x_1 = j(z_1), x_2 = j(z_2)$ nach Definition von $\bar{x}$ und $\bar{z}$, und $f'(x) \leq 0$ für $x \in [x_1, x_2] = [0, \bar{x}]$ wegen 2.; mit 3. folgt also $I(z) < 0$ für $z \in [z_1, z_2] = [0, \bar{z}]$. Also ist $z^* > \bar{z}$.

Wegen Lemma 10.2 sind aber $I(z)$ und $J(z)$ für $z > \bar{z}$ nicht gleichzeitig Null, so daß aus $I(z^*) = 0$ folgt: $J(z^*) \neq 0$.

Wir wenden nun Lemma 9.6 an auf $x_1 = \bar{x}, x_2 = \omega, x_3 = \bar{z}$.

Wegen 2. ist f in $[x_1, x_2] = [\bar{x}, \omega[$ monoton steigend, und wegen $j(\bar{z}) = \bar{x}$ und $\bar{z} \in [\bar{x}, \omega[$ ist $\alpha'(z) > 0$ für $z \in [x_3, x_2] = [\bar{z}, \omega[$. Insbesondere ist also $\alpha'(z^*) \neq 0$, womit alles gezeigt wäre. ■

Corollar 10.2

Sei $Z = \{ z^* \in \mathbb{R} \mid I(z^*) = 0, J(z^*) \neq 0, \alpha'(z^*) \neq 0 \}$.

Dann ist Z unter den Voraussetzungen von Satz 10.2 endlich und durch $\bar{z}$ nach unten beschränkt.

Beweis :

Wir haben im vorherigen Beweis gezeigt:

(i) $I(z) < 0$ für $z \leq \bar{z}$,

(ii) $I(z)$ und $J(z)$ sind nicht gleichzeitig 0 und es ist $\alpha'(z) > 0$ für $z > \bar{z}$.

Mit Corollar 10.1 ist Z nach oben beschränkt. Ist Z nicht endlich, so gibt es eine Folge $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit paarweise verschiedenen $z_k \in Z$, und diese besitzt einen Häufungspunkt z^* . Wegen $I(z_k) = 0$ folgt $I(z^*) = 0$, und wegen (i) ist $z^* > \bar{z}$. Also ist $z^* \in Z$ wegen (ii). Nach Definition der Abbildung r aus Abschnitt 8 gilt (Anmerkung zum Verzweigungssatz für symmetrische periodische Lösungen):

$$z \in Z \Leftrightarrow \alpha'(z) \neq 0, r(z) = 0, r'(z) \neq 0.$$

Mit dem Satz über die Umkehrfunktion ist somit $r(z^*) \neq 0$ in einer Umgebung von z^* , in Widerspruch dazu, daß z^* Häufungspunkt von $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ist. ■

Wir werden nun im nächsten Abschnitt zeigen, daß $f(x) = -\frac{x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ die Voraussetzungen von Satz 10.2 erfüllt.

KAPITEL III : ERGÄNZUNGEN und BEISPIELE

11. Ein Beispiel

Wir wollen nun die Gleichung

$$\dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1))$$

für $f(x) = -\frac{x}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ genauer untersuchen, und zeigen, daß ein differenzierbarer Verzweigungspunkt existiert.

Zunächst ist $f \in C^2(\mathbb{R})$ ungerade, $f(0) = 0$, $x f(x) < 0$ für $x \neq 0$.

Bevor wir die weiteren Voraussetzungen von Satz 10.2 überprüfen, geben wir f' , f'' und $F = \int_0^x f(u) du$ an. Es gilt :

$$f'(x) = \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2}, \quad f'(0) = -1 < 0,$$

$$f''(x) = \frac{2x(3-x^2)}{(1+x^2)^3},$$

$$F(x) = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2).$$

Lemma 11.1

Die Voraussetzungen (1) - (6) von Satz 10.2 sind erfüllt mit

$$c = 1, \quad \bar{c} = 0, \quad \bar{x} = 1, \quad \bar{z} = \sqrt{3}, \quad \hat{z} = \sqrt{3}.$$

Beweis :

$$(1) \quad F(x) + c \cdot \ln x = -\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + \ln x = \ln \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \rightarrow 0 \quad \text{für } x \rightarrow +\infty,$$

$$-x f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \rightarrow 1 = c \quad \text{für } x \rightarrow \infty,$$

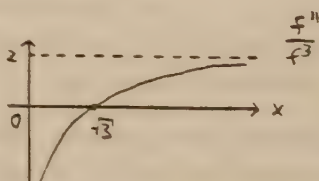
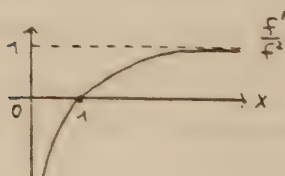
$$x^2 f'(x) = \frac{x^2(x^2-1)}{(1+x^2)^2} \rightarrow 1 = c \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

$$(2) \quad \text{Für } 0 \leq x \leq \bar{x} = 1 \text{ ist } f'(x) = \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2} \leq 0; \text{ für } x > \bar{x} = 1 \text{ ist } f'(x) > 0.$$

$$(3) \quad \text{Für } x \in \mathbb{R}^+ \text{ ist}$$

$$\frac{f'(x)}{f^2(x)} = \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{(1+x^2)^2}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2},$$

d.h. $\frac{f'}{f^2}$ ist auf $\mathbb{R}^+$ streng monoton steigend.



Weiter gilt für $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{f'''}{f^3}(x) = - \frac{2x(3-x^2)}{(1+x^2)^3} \cdot \frac{(1+x^2)^3}{x^3} = - \frac{2x(3-x^2)}{x^3} = 2 \cdot \frac{x^2-3}{x^2} = 2 \cdot \left(1 - \frac{3}{x^2}\right),$$

d.h. $\frac{f'''}{f^3}$ ist auf $\mathbb{R}^+$ ebenfalls streng monoton steigend.

(4) f'' hat in $\mathbb{R}^+$ genau die Nullstelle $\bar{z} = \sqrt{3}$, und es ist

$$\frac{f'}{f^2}(\bar{z}) = 1 - \frac{1}{\bar{z}^2} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \neq \frac{1}{2} = \frac{1}{2c}.$$

(5) Es ist

$$F(\bar{z}) = -\frac{1}{2} \ln(1 + \bar{z}^2) = -\frac{1}{2} \ln(1 + 3) = -\ln 2 = -2 \cdot \frac{1}{2} \ln(1 + 1) = 2 \cdot F(\bar{x}),$$

und $\frac{f'}{f^2}(\bar{z}) = \frac{2}{3} \geq \frac{1}{2} = \frac{1}{2c}.$

(6) Sei $x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{\bar{z}\}$. Dann gilt:

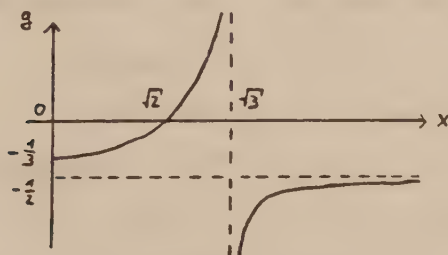
$$\begin{aligned} g(x) &= \left(\frac{f^3}{f''} - 2c \frac{ff''}{f'''} \right)(x) = \frac{f^3}{f''}(x) \cdot \left[1 - 2 \frac{f'}{f^2}(x) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{x^2-3} \cdot \left[1 - 2 \cdot \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{x^2-3} \cdot \left[1 - 2 + \frac{2}{x^2} \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2-x^2}{x^2-3}. \end{aligned}$$

Behauptung: g ist auf $\mathbb{R}^+ \setminus \{\bar{z}\}$ injektiv.

Beweis: Sei $u, v \in \mathbb{R}^+ \setminus \{\bar{z}\}$ mit $g(u) = g(v)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{2-u^2}{u^2-3} &= \frac{2-v^2}{v^2-3} \Rightarrow (2-u^2)(v^2-3) = (2-v^2)(u^2-3) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2v^2 - 6 - u^2v^2 + 3u^2 = 2u^2 - 6 - u^2v^2 + 3v^2 \\ &\Rightarrow 2v^2 + 3u^2 = 2u^2 + 3v^2 \\ &\Rightarrow u^2 = v^2 \end{aligned}$$

d.h. es ist $u=v$ oder $u=-v$. Wegen $u, v > 0$ folgt $u=v$. ■



Damit existiert ein differenzierbarer Verzweigungspunkt $z^* > \bar{z}$.

Wir erhalten z^* als Nullstelle von

$$\tilde{I}(z) = \int_0^z f'(x) f(\phi(x, z)) dx,$$

(vgl. Satz 10.1, Beweisteil a.). Für $\phi(x, z)$ gilt dabei:

$$F(x) + F(\phi(x, z)) = F(z)$$

bzw.

$$-\frac{1}{2} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2} \ln(1+\phi^2(x,z)) = -\frac{1}{2} \ln(1+z^2)$$

oder

$$(1+x^2)(1+\phi^2(x,z)) = (1+z^2) .$$

Es folgt:

$$\phi(x,z) = \sqrt{\frac{z^2-x^2}{1+x^2}} , \quad 0 \leq x \leq z$$

und

$$f(\phi(x,z)) = -\frac{\phi(x,z)}{1+\phi^2(x,z)} = -\frac{\phi(x,z)}{1+z^2} \cdot (1+x^2) = -\frac{1}{1+z^2} \sqrt{(z^2-x^2)(1+x^2)} .$$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \tilde{I}(z) &= \int_0^z f'(x) f(\phi(x,z)) dx = \\ &= - \int_0^z \frac{x^2-1}{(1+x^2)^2} \cdot \frac{1}{1+z^2} \sqrt{z^2-x^2} \cdot (1+x^2)^{\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{1+z^2} \int_0^z \frac{x^2-1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{z^2-x^2} dx . \end{aligned}$$

Mit der Substitution

$$x = z \sin \varphi , \quad dx = z \cos \varphi d\varphi$$

folgt:

$$\tilde{I}(z) = \frac{z^2}{1+z^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-z^2 \sin^2 \varphi}{(1+z^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}} \cos^2 \varphi d\varphi .$$

Das letzte Integral läßt sich z.B. mit dem Rombergverfahren leicht numerisch auswerten. Mit der regula falsi finden wir $\tilde{I}(z)=0$ für $z=z^* \approx 4.2536$; weiter ergibt sich numerisch, daß z^* die einzige (positive) Nullstelle von $\tilde{I}$ ist. Wir vermuten daher, daß es nur einen differenzierbaren Verzweigungspunkt gibt. Wir wollen als Letztes noch $\alpha^* = \alpha(z^*)$ berechnen. Dazu benutzen wir

$$\alpha(z) \cdot t = - \int_0^{x(t,z)} \frac{du}{f(\phi(u,z))}$$

aus dem Beweis von Lemma 9.5. Für $t=1$ erhalten wir

$$\alpha(z) = - \int_0^z \frac{du}{f(\phi(u,z))} = \int_0^z (1+z^2) \cdot \frac{du}{\sqrt{(z^2-u^2)(1+u^2)}} ;$$

und mit der Substitution $u = z \sin \varphi$, $du = z \cos \varphi d\varphi$ folgt:

$$\alpha(z) = (1+z^2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1+z^2 \sin^2 \varphi}} = (1+z^2) \cdot K(-z^2) .$$

Dabei sei

$$K(m) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-m \sin^2 \varphi}} , \quad m < 1$$

das elliptische Integral der 1. Art.

Mit $K(m) = \frac{1}{\sqrt{1-m}} K(\frac{m}{1-m})$ (Formel 17.4.17 in [1]) erhalten wir:

$$\alpha(z) = \sqrt{1+z^2} \cdot K\left(\frac{z^2}{1+z^2}\right) \quad , \quad 0 \leq \frac{z^2}{1+z^2} < 1 \quad ,$$

und hieraus $\alpha^* \approx 12.6$ (Tabelle 17.1 in [1]).

Aus der asymptotischen Beziehung $K(m) \sim \ln \frac{4}{\sqrt{1-m}}$ für $m \rightarrow 1-$ (Formel 112.01 in [3]) folgt noch $\lim_{z \rightarrow \infty} [\alpha(z) - z \cdot \ln(4z)] = 0$ als Bestätigung für das nicht bewiesene Lemma 9.5(2).

12. Eine Gruppe von Transformationen

Sei $f \in C(\mathbb{R})$, $f(x) \neq 0$ für $x \neq 0$, $f(0) = 0$.

Cooke (in [10]) und Saupe [16] haben Transformationen angegeben, mit denen man aus periodischen Lösungen von $\dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1))$ neue periodische Lösungen gewinnen kann.

Wir wollen diese Transformationen hier darstellen, wobei wir zuvor bemerken, daß die von Saupe gemachte Voraussetzung, daß f ungerade ist, nicht notwendig ist.

Definition 12.1

Sei $K := \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{k} \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$.

Für $k \in \mathbb{R}$ sei $T_k: K \times \mathbb{R} \times C(\mathbb{R}) \rightarrow K \times \mathbb{R} \times C(\mathbb{R})$ definiert durch

$T_k(\omega, \alpha, x) = (\bar{\omega}, \bar{\alpha}, \bar{x})$ mit:

$$\bar{\omega} = \frac{2\omega}{k\omega - 2}, \quad \bar{\alpha} = (-1)^k \left(1 + \frac{k}{2}\omega\right)\alpha, \quad \bar{x} = (-1)^k x\left(\left(1 + \frac{k}{2}\omega\right) \cdot\right)$$

für $(\omega, \alpha, x) \in K \times \mathbb{R} \times C(\mathbb{R})$.

T_k ist für $k \in \mathbb{Z}$ definiert, denn ist $(\omega, \alpha, x) \in K \times \mathbb{R} \times C(\mathbb{R})$, so ist zunächst $\bar{\omega} = \frac{2\omega}{k\omega - 2}$ definiert, da $k\omega - 2 \neq 0$ wegen $\omega \in K$ ist. Weiter ist $\bar{\omega} \in K$, denn wäre $\bar{\omega} = \frac{2}{l}$ für ein $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, so wäre $\omega l = \frac{2}{k\omega - 2} = k\omega + 2$ und $(l-k) \cdot \omega = 2$, also $l \neq k$ und $\omega = \frac{2}{l-k}$, $l-k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, in Widerspruch zu $\omega \in K$.

Schließlich ist mit x auch $\mathbb{R} \ni t \mapsto (-1)^k x\left(\left(1 + \frac{k}{2}\omega\right)t\right) \in \mathbb{R}$ stetig.

Wir zeigen nun, daß die Transformationen T_k , $k \in \mathbb{Z}$ eine Gruppe bilden:

Lemma 12.1

$\mathcal{I} = \{T_k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ist mit der Komposition von Abbildungen eine Gruppe, und es gilt $\mathcal{I} \cong \mathbb{Z}$ mit dem Gruppenisomorphismus $g: \mathbb{Z} \ni k \mapsto T_k \in \mathcal{I}$.

Beweis:

Wir zeigen nur $T_k \circ T_1 = T_{k+1}$ für alle $k, l \in \mathbb{Z}$.

Sei $(\omega, \alpha, x) \in K \times \mathbb{R} \times C(\mathbb{R})$ und $(\bar{\omega}, \bar{\alpha}, \bar{x}) = T_1(\omega, \alpha, x)$ sowie

$$(\bar{\bar{\omega}}, \bar{\bar{\alpha}}, \bar{\bar{x}}) = T_k(\bar{\omega}, \bar{\alpha}, \bar{x}) = T_k \circ T_1(\omega, \alpha, x).$$

Dann gilt mit $a = 1 + \frac{1}{2}\omega$:

$$\begin{aligned} \bar{\omega} &= \frac{2\omega}{1\omega - 2} = \frac{\omega}{a}, \quad \bar{\alpha} = (-1)^1 \left(1 + \frac{1}{2}\omega\right)\alpha = (-1)^1 a\alpha, \\ \bar{x}(t) &= (-1)^1 x\left(\left(1 + \frac{1}{2}\omega\right)t\right) = (-1)^1 x(at), \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Mit $b = 1 + \frac{k}{2}\bar{\omega}$ folgt:

$$\bar{\omega} = \frac{\bar{a}}{\bar{b}} = \frac{a}{ab} \quad , \quad \bar{\alpha} = (-1)^h b \bar{a} = (-1)^{h+1} a b \alpha \quad ;$$

$$\bar{\bar{x}}(t) = (-1)^h \bar{x}(bt) = (-1)^{h+1} x(abt) \quad , \quad t \in \mathbb{R}.$$

Damit muß nur noch $ab = 1 + \frac{h+1}{2}\omega$ gezeigt werden. Es ist aber :

$$ab = a \cdot (1 + \frac{h}{2}\bar{\omega}) = a + \frac{h}{2}a\bar{\omega} = a + \frac{h}{2}\omega = 1 + \frac{1}{2}\omega + \frac{h}{2}\omega = 1 + \frac{h+1}{2}\omega.$$

Wir wollen nun die Transformationen $T_h, h \in \mathbb{Z}$ auf periodische bzw. symmetrische periodische Lösungen von (af) anwenden. Dazu definieren wir :

Definition 12.2

1. Sei $P \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times C^1(\mathbb{R})$ die Menge der $(\omega, \alpha, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times C^1(\mathbb{R})$ für die gilt:

(P1) $x(0) = 0 \quad , \quad x \not\equiv 0$

(P2) $x(\cdot + \omega) = x$

(P3) $\dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1)) \quad , \quad t \in \mathbb{R}$

(P4) $\omega \neq 0 \quad , \quad \frac{2}{\omega} \in \mathbb{Z}.$

2. Sei $S \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times C^1(\mathbb{R})$ die Menge der $(\omega, \alpha, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times C^1(\mathbb{R})$ für die gilt:

(S1) $x(0) = 0 \quad , \quad x \not\equiv 0$

(S2) $x(\cdot + \frac{\omega}{2}) = -x$

(S3) $\dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1)) \quad , \quad t \in \mathbb{R}$

(S4) $\omega \neq 0 \quad , \quad \frac{2}{\omega} \in \mathbb{Z}.$

Natürlich ist $S \subseteq P$ und $P \subseteq K \times \mathbb{R} \times C(\mathbb{R})$ wegen (P4), so daß für alle $(\omega, \alpha, x) \in S$ bzw. $(\omega, \alpha, x) \in P$ und $k \in \mathbb{Z}$ $T_h(\omega, \alpha, x)$ definiert ist. Es gilt :

Lemma 12.2

Sei $k \in \mathbb{Z}$. Dann ist

1. $T_{2k}(P) \subseteq P \quad ,$

2. $T_h(S) \subseteq S \quad .$

Beweis :

1. Sei $(\omega, \alpha, x) \in P$, also $x(0) = 0, x \not\equiv 0, x(t+\omega) = x(t)$ und $\dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1))$ für alle $t \in \mathbb{R}$, sowie $\omega \neq 0, \frac{2}{\omega} \in \mathbb{Z}.$

Sei $(\bar{\omega}, \bar{\alpha}, \bar{x}) = T_{2k}(\omega, \alpha, x)$, also mit $a = 1 + k\omega \neq 0 :$

$$\bar{\omega} = \frac{2\omega}{2k\omega - 2} = \frac{\omega}{k} \quad , \quad \bar{\alpha} = (-1)^{2k} (1 + k\omega) \alpha = a \alpha \quad ,$$

$$\bar{x}(t) = (-1)^{2k} x((1 + k\omega)t) = x(at) \quad \text{für } t \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt :

(P1) $\bar{x}(0) = x(a \cdot 0) = x(0) = 0 \quad , \quad \bar{x} \not\equiv 0$ wegen $x \not\equiv 0$,

(P2) $\bar{x}(t + \bar{\omega}) = x(at + a\bar{\omega}) = x(at + \omega) = x(at) = \bar{x}(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$,

$$(P3) \quad \dot{\bar{x}}(t) = a \dot{\bar{x}}(at) = a \alpha f(x(at-1)) = \bar{\alpha} f(x(at-1-k\omega)) = \bar{\alpha} f(x(at-a)) = \\ = \bar{\alpha} f(\bar{x}(t-1)) \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R},$$

$$(P4) \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{a} \neq 0 \text{ da } \omega \neq 0; \frac{2}{\bar{\omega}} \in \mathbb{Z}, \text{ denn ist } \frac{2}{\bar{\omega}} = l \text{ für ein } l \in \mathbb{Z}, \text{ so folgt} \\ l = \frac{2}{\bar{\omega}} = 2 \cdot \frac{2k\omega + 2}{2\omega} = 2k + \frac{2}{\omega}, \text{ also } \frac{2}{\omega} = l - 2k \in \mathbb{Z}.$$

Damit ist $(\bar{\omega}, \bar{\alpha}, \bar{x}) \in P$.

2. Sei $(\omega, \alpha, x) \in S$, also $x(0) = 0, x \neq 0, x(t + \frac{\omega}{2}) = -x(t)$ und $\dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1))$ für alle $t \in \mathbb{R}$, sowie $\omega \neq 0, \frac{2}{\omega} \in \mathbb{Z}$.

Sei $(\bar{\omega}, \bar{\alpha}, \bar{x}) = T_k(\omega, \alpha, x)$, also mit $a = 1 + \frac{k}{2}\omega \neq 0$:

$$\bar{\omega} = \frac{2\omega}{k\omega + 2} = \frac{2}{k + \frac{2}{\omega}}, \quad \bar{\alpha} = (-1)^k (1 + \frac{k}{2}\omega) \alpha = (-1)^k \alpha, \\ \bar{x}(t) = (-1)^k x((1 + \frac{k}{2}\omega)t) = (-1)^k x(at), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dann gilt:

$$(S1) \quad \bar{x}(0) = (-1)^k x(a \cdot 0) = (-1)^k \cdot 0 = 0, \quad \bar{x} \neq 0,$$

$$(S2) \quad \bar{x}(t + \frac{\bar{\omega}}{2}) = (-1)^k x(at + a \frac{\bar{\omega}}{2}) = (-1)^k x(at + \frac{1}{2}\omega) = -(-1)^k x(at) = -\bar{x}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(S3) Durch Induktion folgt zunächst

$$(-1)^n x(t - \frac{1}{2}n\omega) = x(t) \text{ für alle } n \in \mathbb{Z} \text{ und } t \in \mathbb{R}.$$

Damit gilt für $t \in \mathbb{R}$:

$$\dot{\bar{x}}(t) = (-1)^k a \dot{x}(at) = (-1)^k a \alpha f(x(at-1)) = \bar{\alpha} f((-1)^k x(at-1 - \frac{1}{2}k\omega)) = \\ = \bar{\alpha} f((-1)^k x(at-a)) = \bar{\alpha} f(\bar{x}(t-1)),$$

(S4) $\bar{\omega} = \frac{\omega}{a} \neq 0$, da $\omega \neq 0; \frac{2}{\bar{\omega}} \in \mathbb{Z}$, denn aus $\frac{2}{\bar{\omega}} = l \in \mathbb{Z}$ folgt:

$$l = \frac{2}{\bar{\omega}} = \frac{2}{2\omega} (k\omega + 2) = k + \frac{2}{\omega}, \text{ also } \frac{2}{\omega} = l - k \in \mathbb{Z}.$$

Wir können also aus einer periodischen Lösung bzw. symmetrischen periodischen Lösung $x: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ von (αf) (die wir wegen der Periodizität auf ganz $\mathbb{R}$ periodisch fortsetzen können) neue periodische Lösungen konstruieren.

Dabei bleibt die Amplitude erhalten:

Corollar 12.1

Sei $k \in \mathbb{Z}$.

1. Ist $(\omega, \alpha, x) \in P$, $(\bar{\omega}, \bar{\alpha}, \bar{x}) = T_{2k}(\omega, \alpha, x)$, so ist $(\bar{\omega}, \bar{\alpha}, \bar{x}) \in P$, und x und $\bar{x}$ haben diesselbe Amplitude.

2. Ist $(\omega, \alpha, x) \in S$, $(\bar{\omega}, \bar{\alpha}, \bar{x}) = T_k(\omega, \alpha, x)$, so ist $(\bar{\omega}, \bar{\alpha}, \bar{x}) \in S$, und x und $\bar{x}$ haben diesselbe Amplitude.

Beweis:

Wir hatten $x(1)$ als Amplitude von x bezeichnet, falls $x(0) = 0$ ist.

Mit dem eben Bewiesenen gilt dann:

1. $\bar{x}(1) = (-1)^{2h} x(1 + kw) = 1 \cdot x(1) = x(1)$,
2. $\bar{x}(1) = (-1)^k x(1 + \frac{k}{2}w) = (-1)^k \cdot (-1)^k x(1) = x(1)$.

Mit Lemma 12.1 und 12.2 erhalten wir :

Corollar 12.2

1. Für $k \in \mathbb{Z}$ sei $T_{2h}^P: P \rightarrow P$ die durch T_{2h} induzierte Abbildung.

Dann ist $\mathcal{P} := \{ T_{2h}^P \mid k \in \mathbb{Z} \}$ mit der Komposition von Abbildungen eine Gruppe und für $k, l \in \mathbb{Z}$ gilt :

$$T_{2h}^P \circ T_{2l}^P = T_{2h+2l}^P.$$

2. Für $k \in \mathbb{Z}$ sei $T_h^S: S \rightarrow S$ die durch T_h induzierte Abbildung.

Dann ist $\mathcal{S} := \{ T_h^S \mid k \in \mathbb{Z} \}$ mit der Komposition von Abbildungen eine Gruppe und für $k, l \in \mathbb{Z}$ gilt :

$$T_h^S \circ T_l^S = T_{h+l}^S.$$

Bevor wir nun diese Transformationen auf unser Verzweigungsproblem anwenden, zeigen wir noch, daß die Bedingung $\frac{2}{\omega} \in \mathbb{Z}$ aus (P4) bzw. (S4) i.A. unnötig ist:

Lemma 12.3

Sei $f \in C(\mathbb{R})$ mit $f(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$; f erfülle eine Lipschitzbedingung.

Sei weiter $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \in C^1(\mathbb{R})$ und es gelte (P1), (P2), (P3).

Dann ist $\alpha \neq 0$ und $\frac{2}{\omega} \in \mathbb{Z}$.

Beweis :

1. Es ist $\omega \neq 1$, denn sonst gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ $x(t-1) = x(t)$, also

$$\dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1)) = \alpha f(x(t)), \quad x(0) = 0,$$

d.h. es ist $x \equiv 0$ wegen $f(0) = 0$.

2. Es ist $\omega \neq 2$, denn sonst ist $x(t+2) = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, und mit $z = x(1)$, $y = x(-1)$ gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\dot{x}(t) = \alpha f(y(t)),$$

$$\dot{y}(t) = \dot{x}(t-1) = \alpha f(x(t-2)) = \alpha f(x(t)),$$

mit $x(0) = 0$, $y(0) = x(-1) = x(-1+2) = x(1) = z$, $x(1) = z$, $y(1) = x(0) = 0$,

d.h. (x, y) ist die (maximale) Lösung von

$$(*) \quad \dot{x} = \alpha f(y), \quad x(0) = 0$$

$$\dot{y} = \alpha f(x), \quad y(0) = z.$$

Sei $F = \int_0^t f(u) du$, dann ist $w = (\mathbb{R} \ni t \mapsto F(x(t)) - F(y(t)) \in \mathbb{R})$ konstant wegen $\dot{w} = f(x) \dot{x} - f(y) \dot{y} = \alpha f(x) f(y) - \alpha f(y) f(x) = 0$.

Also ist $w(0) = w(1)$ mit $w(0) = F(0) - F(z) = -F(z)$, $w(1) = F(z) - F(0) = F(z)$,
woraus $F(z) = 0$ folgt. Damit ist $z = 0$, denn ist etwa $z > 0$, so gibt es wegen
 $F(0) = 0 = F(z)$ ein $u \in]0, z[$ mit $f(u) = F'(u) = 0$. Nach Voraussetzung ist
aber $f(u) \neq 0$ für $u \neq 0$.

Somit ist $x(0) = y(0) = 0$, und aus (*) folgt $x(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$, in
Widerspruch zu (P1).

3. Annahme: $\frac{2}{\omega} \in \mathbb{Z}$, d.h. $\omega = \frac{2}{k}$ für ein $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

1. Fall: k ist gerade, d.h. $k = 2l$ für ein $l \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ und $\omega = \frac{1}{l}$.

Dann sei $\bar{\alpha} = -\frac{\alpha}{1}$, $\bar{x}(t) = x(-\frac{1}{1})$ für $t \in \mathbb{R}$, also $\bar{x}(0) = 0$, $\bar{x} \neq 0$

und da x periodisch ist mit Periode $\frac{1}{1}$, gilt für $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= -\frac{1}{1} \dot{x}\left(-\frac{1}{1}\right) = -\frac{\alpha}{1} f\left(x\left(-\frac{1}{1}\right)\right) = \bar{\alpha} f\left(x\left(-\frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right)\right) = \\ &= \bar{\alpha} f\left(x\left(-\frac{1}{1} + \frac{1}{1}\right)\right) = \bar{\alpha} f(\bar{x}(t-1)),\end{aligned}$$

$$\bar{x}(t+1) = x\left(-\frac{1}{1} - \frac{1}{1}\right) = x\left(-\frac{1}{1}\right) = \bar{x}(t),$$

dies ist aber nach 1. nicht möglich.

2. Fall: k ungerade, d.h. $k = 2l+1$ für ein $l \in \mathbb{Z}$ und $\omega = \frac{2}{2l+1}$.

Dann sei $\bar{\alpha} = \frac{1}{2l+1} \alpha$, $\bar{x}(t) = x(\frac{1}{2l+1} t)$ für $t \in \mathbb{R}$, also:

$\bar{x}(0) = 0$, $\bar{x} \neq 0$ und für $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{x}}(t) &= \frac{1}{2l+1} \dot{x}\left(\frac{1}{2l+1} t\right) = \frac{1}{2l+1} \alpha f\left(x\left(\frac{1}{2l+1} t\right)\right) = \\ &= \bar{\alpha} f\left(x\left(\frac{1}{2l+1} t - \frac{2l+1}{2l+1} + 1\right)\right) = \bar{\alpha} f\left(x\left(\frac{1}{2l+1} t - \frac{1}{2l+1}\right)\right) = \\ &= \bar{\alpha} f\left(x\left(\frac{1}{2l+1} (t-1)\right)\right) = \bar{\alpha} f(\bar{x}(t-1)),\end{aligned}$$

$$\bar{x}(t+2) = x\left(\frac{1}{2l+1} t + \frac{2}{2l+1}\right) = x\left(\frac{1}{2l+1} t + \omega\right) = x\left(\frac{1}{2l+1} t\right) = \bar{x}(t).$$

Dies ist aber wegen 2. nicht möglich.

Damit ist die Annahme falsch. ■

Sei nun $f \in C^1(\mathbb{R})$ ungerade, $f'(0) = -1$, $x f(x) < 0$ für $x \neq 0$.

Sei weiter $x(., z): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ für $z > 0$ die Kaplan-Yorke Lösung aus Abschnitt 4
von (af), $\alpha = \alpha(z)$ mit Amplitude z .

Dann ist $K(z) = (4, \alpha(z), x(., z)) \in S$ für alle $z > 0$, und wir können die Trans-
formationen T_k^S , $k \in \mathbb{Z}$ anwenden.

Sei $K_k(z) = (\omega_k, \alpha_k(z), x_k(., z)) = T_k^S(K(z))$ für $k \in \mathbb{Z}$, $z > 0$, also

$$\omega_k = \frac{4}{2k+1}$$

$$\alpha_k(z) = (-1)^k (2k+1) \alpha(z)$$

$$x_k(t, z) = (-1)^k x((2k+1)t, z), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dann ist $x_k(., z)$ symmetrische periodische Lösung von $(\alpha_k(z)f)$ mit

Periode ω_k und Amplitude $z > 0$.

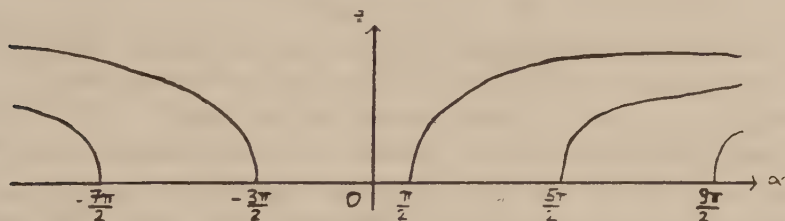
Wir können somit den Ast $\{(\alpha_k(z), x_k(\cdot, z)) | [0, 1] \in \mathbb{R} \times C_0 | z > 0\}$ in das Verzweigungsdiagramm von f eintragen.

Dabei dürfen wir uns auf $k \in \mathbb{N}_0$ beschränken, da für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt:

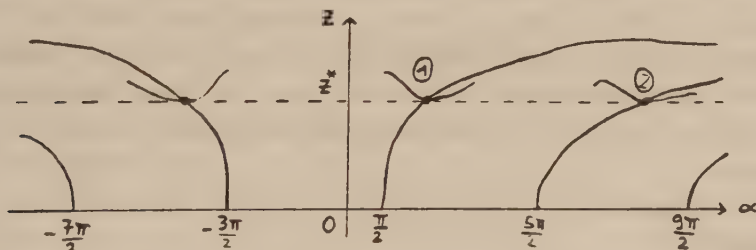
$$\alpha_{-k}(z) = \alpha_{k-1}(z) \quad , \quad x_{-k}(\cdot, z) = x_{k-1}(\cdot, z) \quad , \quad z > 0.$$

(Man beachte, daß $x(\cdot, z)$ ungerade ist).

Wegen $\alpha(0) = \frac{1}{2}$ ist $\alpha_k(0) = (-1)^k (2k+1) \cdot \frac{1}{2}$, d.h. wir erhalten für jedes $k \in \mathbb{N}_0$ einen bei $((-1)^k (2k+1) \cdot \frac{1}{2}, 0) \in \mathbb{R} \times C_0$ abzweigenden Ast symmetrischer periodischer Lösungen mit Periode $\omega_k = \frac{4}{2k+1}$:



Sei nun $z^* > 0$ Verzweigungspunkt auf dem Kaplan-Yorke-Zweig, bei dem symmetrische periodische Lösungen abzweigen. Dann können wir auf diese ebenfalls die Transformationen T_k^S , $k \in \mathbb{N}_0$ anwenden, und erhalten somit folgendes Bild:



Die abzweigenden Äste sind jedoch nicht stetig miteinander verbunden, denn ist etwa $(\beta, \varphi) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \times C_0$ eine stetige Abbildung, so daß $(\beta(0), \varphi(0))$ dem Punkt ① und $(\beta(1), \varphi(1))$ dem Punkt ② entspricht, und $x^{\beta(s)}(\cdot, \varphi(s))$ für alle $s \in [0, 1]$ symmetrische periodische Lösung von $(\beta(s)f)$ mit Periode $\omega(s) > 0$ ist, so ist $\omega(0) = 4$, $\omega(1) = \frac{4}{5}$, und da $\omega = 2\tau \circ (\beta, \varphi)$ (vgl. Definition 3.1 und Lemma 3.2) stetig ist, gibt es $s \in]0, 1[$ mit $\omega(s) = 2$. Dies ist aber wegen Lemma 12.3 nicht möglich.

13. Lokale Beschreibung des Verzweigungspunktes

Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ ungerade, $f(0) = 0$, und $xf(x) < 0$ für $x \neq 0$.

Für $z^* > 0$ seien die Voraussetzungen des Verzweigungssatzes aus Abschnitt 8 erfüllt, so daß es offene Umgebungen $I \subseteq \mathbb{R}$ von $0 \in \mathbb{R}$, $J \subseteq \mathbb{R}$ von $\alpha^* \in \mathbb{R}$, $U \subseteq C_0$ von $x_0^* \in C_0$ und $(\bar{\alpha}, \bar{\varphi}) \in C^1(I, J \times U)$ wie in Satz 5.1 gibt.

Für $s \in I$ sei :

$$\bar{x}(., s) = x^{\bar{\alpha}(s)}(., \bar{\varphi}(s)) : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\bar{\omega}(s) = 2\tau(\bar{\alpha}(s), \bar{\varphi}(s)) \in]2, \infty[,$$

$$\bar{z}(s) := \bar{x}(1, s) = \bar{\varphi}(s)(1);$$

(τ aus Definition 3.1(1)); dann ist also $\bar{x}(., s)$ für alle $s \in I$ symmetrische periodische Lösung von $(\bar{\alpha}(s)f)$ mit Periode $\bar{\omega}(s)$ und Amplitude $\bar{z}(s)$.

Wir setzen wieder $\bar{x}(., s)$ auf ganz $\mathbb{R}$ fort. Für $s = 0$ gilt :

$\bar{x}(., 0) = x(., z^*)$, $\bar{\omega}(0) = 4$, $\bar{z}(0) = z^*$, $\bar{\varphi}(0) = x_0^*$, $\bar{\alpha}(0) = \alpha^* = \alpha(z^*)$, und für $s \in I$, $s \neq 0$ ist $(\bar{\alpha}(s), \bar{\varphi}(s)) \in \text{PZ}(f)$, also $\bar{\omega}(s) \neq 4$, denn die symmetrischen Periode-4-Lösungen liegen in $\text{PZ}(f)$.

Wir hatten $\bar{\alpha}, \bar{\varphi}$ in Satz 5.1 erhalten aus differenzierbaren Funktionen

$\bar{z} : I \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{\psi} : I \rightarrow C_0$ durch :

$$\bar{\alpha}(s) = \alpha(\bar{z}(s)), \bar{\varphi}(s) = x_0^{\bar{z}(s)} + \bar{\psi}(s), s \in I,$$

dabei war $\bar{z}(0) = z^*$, $\bar{\psi}(0) = 0$, $\bar{\psi}'(0) \neq 0$, $\bar{\psi}'(0) \in \text{Kern}(U^* + 1_{C_0})$.

Weiter hatten wir in Satz 5.1 gezeigt, daß die Anfangstücke $\psi \in C_0$ symmetrischer periodischer Lösungen von (βf) mit $(\beta, \psi) \in J \times U$ genau aus dem Kaplan-Yorke-Zweig $(\alpha(z), x_0^z)$, $z > 0$ und den abzweigenden Lösungen $(\bar{\alpha}(s), \bar{\varphi}(s))$, $s \in I$ bestehen.

Wir beweisen nun :

Lemma 13.1

Der abzweigende Ast läßt sich lokal durch die Periode parametrisieren, d.h. $s \mapsto \bar{\omega}(s)$ ist in einer Umgebung I' von $0 \in I$ reguläre Parametertransformation, also stetig differenzierbar mit $\bar{\omega}'(s) \neq 0$ für $s \in I'$.

Beweis :

Wir zeigen nur $\bar{\omega}'(0) \neq 0$.

Dazu sei zunächst (vgl. Lemma 4.3)

$$\eta = \frac{d}{dz} \Big|_{z^*} x_0^z = \frac{\partial x}{\partial z} (., z^*) \Big|_{[0,1]} \in C_0.$$

Wegen $x^{\alpha(z)}(., x_0^z) = x(., z) \Big|_{\mathbb{R}_0^+}$ gilt $x^{\alpha(z)}(2, x_0^z) = 0$ für alle $z > 0$, und

Differentiation nach z liefert bei $z = z^*$:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \alpha} |_{\alpha^*} x^{\alpha}(2, x_0^*) \right] \cdot \alpha'(z^*) + \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} |_{x_0^*} x^{\alpha^*}(2, \varphi) \right] \eta = 0.$$

Wegen $x^{\tilde{\alpha}}(s) (\frac{1}{2} \tilde{\omega}(s), \tilde{\varphi}(s)) = 0$ ergibt Differentiation nach s bei $s = 0$ mit

$$\tilde{\alpha}'(0) = \alpha'(z^*) \tilde{z}'(0), \quad \tilde{\varphi}'(0) = \tilde{z}'(0) \eta + \tilde{\varphi}'(0):$$

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\frac{\partial}{\partial \alpha} |_{\alpha^*} x^{\alpha}(2, x_0^*) \right] \tilde{\alpha}'(0) + \dot{x}^{\alpha^*}(2, x_0^*) \cdot \frac{1}{2} \tilde{\omega}'(0) + \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} |_{x_0^*} x^{\alpha^*}(2, \varphi) \right] \tilde{\varphi}'(0) = \\ &= \tilde{z}'(0) \cdot \left(\left[\frac{\partial}{\partial \alpha} |_{\alpha^*} x^{\alpha}(2, x_0^*) \right] \alpha'(z^*) + \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} |_{x_0^*} x^{\alpha^*}(2, \varphi) \right] \eta \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \dot{x}^{\alpha^*}(2, x_0^*) \cdot \tilde{\omega}'(0) + \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} |_{x_0^*} x^{\alpha^*}(2, \varphi) \right] \tilde{\varphi}'(0) = \\ &= \frac{1}{2} \dot{x}(2, z^*) \cdot \tilde{\omega}'(0) + \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} |_{x_0^*} x^{\alpha^*}(2, \varphi) \right] \tilde{\varphi}'(0). \end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\frac{1}{2} \dot{x}(2, z^*) \cdot \tilde{\omega}'(0) = - \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} |_{x_0^*} x^{\alpha^*}(2, \varphi) \right] \tilde{\varphi}'(0),$$

und wir müssen $\left[\frac{\partial}{\partial \varphi} |_{x_0^*} x^{\alpha^*}(2, \varphi) \right] \tilde{\varphi}'(0) \neq 0$ zeigen.

Sei $\Gamma = \{ C \ni \varphi \mapsto \varphi(0) \in \mathbb{R} \}$; Γ ist linear und stetig, und für alle $\varphi \in C$ gilt:

$$(\Gamma \circ x_2^{\alpha^*})(\varphi) = \Gamma(x_2^{\alpha^*}(\varphi)) = x_2^{\alpha^*}(\varphi)(0) = x^{\alpha^*}(2, \varphi) = x^{\alpha^*}(2, \cdot)(\varphi),$$

also $\Gamma \circ x_2^{\alpha^*} = x^{\alpha^*}(2, \cdot)$, und Differentiation liefert bei $\varphi = x_0^*$:

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} |_{x_0^*} x^{\alpha^*}(2, \varphi) \right] \tilde{\varphi}'(0) &= [Dx^{\alpha^*}(2, \cdot)(x_0^*)] \tilde{\varphi}'(0) = [D(\Gamma \circ x_2^{\alpha^*})(x_0^*)] \tilde{\varphi}'(0) = \\ &= \Gamma \circ [Dx_2^{\alpha^*}(x_0^*)] \tilde{\varphi}'(0) = \Gamma \circ W^*(\tilde{\varphi}'(0)) = W^*(\tilde{\varphi}'(0))(0), \end{aligned}$$

mit W^* aus Definition 5.2.

Mit Lemma 7.6(2, $\bar{u}$) gilt nun $\tilde{\varphi}'(0) \in \text{Kern}(U^* + 1_{C_0}) = \mathbb{R} \zeta$ für ein $\zeta \in C_0$ mit $V^* \zeta(1) = -2\alpha'(z^*) f(z^*)$.

Es gibt also $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\tilde{\varphi}'(0) = \lambda \zeta$ und wegen $\tilde{\varphi}'(0) \neq 0$ ist $\lambda \neq 0$.

Mit Lemma 6.1(2) folgt:

$$W^*(\tilde{\varphi}'(0))(0) = \lambda \cdot W^* \zeta(0) = \lambda \cdot V^* \zeta(1) = -2\lambda \alpha'(z^*) f(z^*) \neq 0. \quad \blacksquare$$

Wir gehen nun von folgender Situation aus:

- (1) die abzweigenden symmetrischen Lösungen sind stetig und differenzierbar nach der Periode parameterisiert, d.h. es gibt eine offene Umgebung $\tilde{I} \subseteq \mathbb{R}$ von $4 \in \mathbb{R}$ und eine stetig differenzierbare Kurve

$$(\tilde{\alpha}, \tilde{\varphi}) : \tilde{I} \longrightarrow \mathbb{R} \times C_0 \text{ mit}$$

$$(i) \quad \tilde{\alpha}(4) = \alpha^*, \quad \tilde{\varphi}(4) = x_0^{\alpha^*}$$

- (ii) $x(\cdot, \omega) = x^{\tilde{\alpha}(\omega)}(\cdot, \tilde{\varphi}(\omega))$ ist für alle $\omega \in \tilde{I}$ symmetrische periodische Lösung von $(\tilde{\alpha}(\omega) f)$ mit Periode ω und Amplitude

$$\tilde{z}(\omega) = \tilde{\varphi}(\omega)(1),$$

(2) in einer geeigneten Umgebung des Verzweigungspunktes (α^*, x_0^*) bestehen die symmetrischen periodischen Lösungen genau aus den Kaplan-Yorke Lösungen und den Lösungen der Form $(\tilde{\alpha}(\omega), \tilde{\varphi}(\omega))$ mit $\omega \in \tilde{I}$,

(3) die Transformation $T_1^S: S \rightarrow S$ ist stetig.

Wir wollen diese Behauptungen nicht mehr im Einzelnen nachprüfen, sondern zeigen, wie man damit $\frac{d\tilde{\alpha}}{d\omega}$ und $\frac{d\tilde{z}}{d\omega}$ im Verzweigungspunkt berechnen kann.

Zunächst ist $(-\omega, \tilde{\alpha}(\omega), \tilde{x}(\cdot, \omega)) \in S$ für alle $\omega \in \tilde{I}$, also mit Corollar 12.1(2):

$$(\hat{\omega}(\omega), \hat{\alpha}(\omega), \hat{x}(\cdot, \omega)) = T_1(-\omega, \tilde{\alpha}(\omega), \tilde{x}(\cdot, \omega)) \in S.$$

Nach Definition von T_1 gilt:

$$\hat{\omega}(\omega) = \frac{2\omega}{\omega-2},$$

$$\hat{\alpha}(\omega) = (\tfrac{1}{2}\omega - 1) \tilde{\alpha}(\omega),$$

$$\hat{x}(t, \omega) = -\tilde{x}((1-\tfrac{1}{2}\omega)t, \omega), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sei $\hat{\varphi}(\omega) = \hat{x}(\cdot, \omega)|_{[0,1]}$, $\hat{z}(\omega) = \hat{x}(1, \omega)$, dann gilt:

$$\hat{\omega}(4) = 4, \quad \hat{\alpha}(4) = \alpha^*, \quad \hat{x}(\cdot, 4) = x(\cdot, z^*) \quad \text{und} \quad \hat{\varphi}(4) = x_0^*,$$

und $\hat{x}(\cdot, \omega)$ ist symmetrische periodische Lösung von $(\hat{\alpha}(\omega)f)$ mit Periode $\hat{\omega}(\omega)$. Mit den Voraussetzungen (2) und (3) schließen wir daher

$$\hat{\alpha}(\omega) = \tilde{\alpha}(\hat{\omega}(\omega)),$$

$$\hat{\varphi}(\omega) = \tilde{\varphi}(\hat{\omega}(\omega)),$$

für ω genügend nahe bei $4 \in \mathbb{R}$.

Aus $\tilde{\alpha}(\hat{\omega}(\omega)) = \hat{\alpha}(\omega) = (\tfrac{1}{2}\omega - 1) \tilde{\alpha}(\omega)$ erhalten wir durch Differentiation bei $\omega = 4$:

$$\tilde{\alpha}'(4) \hat{\omega}'(4) = \tfrac{1}{2} \tilde{\alpha}(4) + (\tfrac{4}{2} - 1) \tilde{\alpha}'(4) = \tfrac{1}{2} \alpha^* + \tilde{\alpha}'(4);$$

und wegen $\hat{\omega}'(4) = -1$ folgt hieraus:

$$\tilde{\alpha}'(4) = -\tfrac{1}{2} \alpha^*;$$

Also ist $\tilde{\alpha}'(4) \neq 0$, d.h. wir können den abzweigenden Ast im Verzweigungspunkt auch durch den Verzögerungsparameter α parameterisieren.

Mit Corollar 12.1(2) gilt:

$$\hat{z}(\omega) = \hat{x}(1, \omega) = \tilde{x}(1, \omega) = \tilde{z}(\omega),$$

$$\text{und:} \quad \hat{z}(\omega) = \hat{\varphi}(\omega)(1) = \tilde{\varphi}(\hat{\omega}(\omega))(1) = \tilde{z}(\hat{\omega}(\omega)),$$

d.h. es ist $\tilde{z}(\omega) = \tilde{z}(\hat{\omega}(\omega))$ für ω genügend nahe bei 4, und Differentiation ergibt: $\tilde{z}'(4) = \tilde{z}'(4) \cdot \hat{\omega}(4) = -\tilde{z}'(4)$, d.h. es ist

$$\tilde{z}'(4) = 0.$$

Insgesamt folgt :

Der abzweigende Ast läßt sich lokal beim Verzweigungspunkt durch die Periode bzw. durch den Verzögerungsparameter α auf natürliche Weise parameterisieren, jedoch nicht durch die Amplitude z (d.h. $\omega \mapsto \tilde{z}(\omega)$ ist keine reguläre Parametertransformation).

Bei der Parameterisierung durch die Periode gilt :

$$\frac{dz}{d\omega}(4) = -\frac{1}{4}\alpha^* \quad , \quad \frac{dz}{d\omega}(4) = 0 \quad ,$$

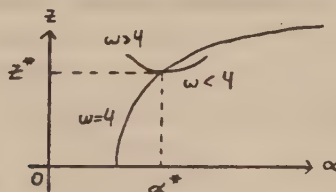
bei Parameterisierung durch α gilt :

$$\frac{d\omega}{d\alpha}(\alpha^*) = -\frac{4}{\alpha^*} \quad , \quad \frac{dz}{d\alpha}(\alpha^*) = 0 \quad .$$

Insbesondere folgt :

Die Perioden der abzweigenden Lösungen sind nahe am Verzweigungspunkt kleiner als 4 für $\alpha > \alpha^*$ bzw. größer als 4 für $\alpha < \alpha^*$.

Dies stimmt auch mit numerischen Ergebnissen von Hadeler [7] überein :



Aufgrund dieser Ergebnisse erwarten wir auch, daß im Verzweigungspunkt sowohl die Amplitude z als auch das Produkt $\alpha \cdot \omega$ ein lokales Minimum annehmen. Wir können aber nur

$$\frac{dz}{d\alpha}(\alpha^*) = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d}{d\alpha} \big|_{\alpha^*} (\alpha \omega) = 0$$

zeigen.

14. Abschließende Bemerkungen

a. Symmetriebrechende Verzweigung

Für $f = -\sin$ hat Walther gezeigt, daß auch Sekundärverzweigung auftreten kann, bei der nichtsymmetrische periodische Lösungen abzweigen.

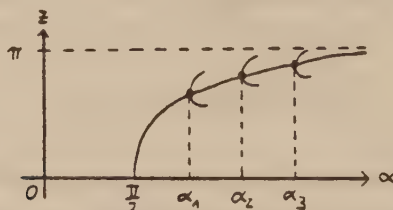
Allerdings wurde bisher noch nicht bewiesen, daß sich der abzweigende Ast stetig und differenzierbar parameterisieren läßt, wie aufgrund numerischer Untersuchungen zu erwarten ist.

Wir haben uns mit dieser Frage ebenfalls beschäftigt, können aber noch keinen vollständigen Beweis bringen. Unsere Ergebnisse hierzu lassen sich zu folgender Vermutung zusammenfassen, die wir auch numerisch bestätigt haben:

Vermutung:

Auf dem Kaplan-Yorke-Zweig von $\dot{x}(t) = -\alpha \sin x(t-1)$ liegen abzählbar viele Verzweigungspunkte $\alpha_k, k \in \mathbb{N}$.

Die Abstände $\alpha_{k+1} - \alpha_k$ aufeinanderfolgender Verzweigungspunkte konvergiert gegen π .



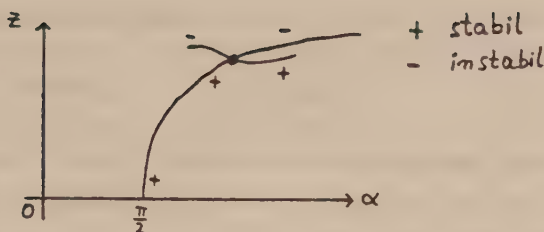
Dies würde in Kontrast zu Corollar 10.2 stehen, wonach im Fall symmetrieeerhaltender Verzweigung nur endlich viele Verzweigungspunkte zu erwarten sind. Wir hoffen, daß wir die Vermutung in späteren Arbeiten auch für eine größere Klasse von Gleichungen zeigen werden können.

b. Zur Stabilität periodischer Lösungen

Ist $x: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodische Lösung von (αf) , $\varphi = x|_{[0,1]} \in C_0$ mit $(\alpha, \varphi) \in \Omega$ und $P^\alpha(\varphi) = \varphi$ (vgl. Definition 3.1), so heißt x stabil, falls alle Eigenwerte von $DP^\alpha(\varphi)$ einen Betrag kleiner als 1 haben.

In einem Verzweigungspunkt $z^* > 0$ auf dem Kaplan-Yorke-Zweig besitzt $DP^{\alpha^*}(x_0^*) = U^* \circ U^*$ (vgl. S. 50) den Eigenwert 1.

Aufgrund numerischer Untersuchungen ist folgendes Bild zu erwarten:



Wir können jedoch über die Stabilität der abzweigenden Lösungen keine Aussagen machen.

Im Verzweigungspunkt $\alpha = \frac{\pi}{2}$, bei dem die Kaplan-Yorke-Lösungen von den Nulllösungen abzweigen, können wir jedoch zeigen, daß bei $z = 0$ ebenfalls der Eigenwert 1 vorliegt, der mit der Geschwindigkeit $\frac{2\pi}{1+(\frac{\pi}{2})^2}$ (bez. α) durchlaufen wird. Das bedeutet:

Geht der Primärzweig bei $\alpha = \frac{\pi}{2}$ nach rechts ($f'''(0) > 0$), so sind die Kaplan-Yorke-Lösungen (lokal) stabil, bei Verzweigung nach links ($f'''(0) < 0$) instabil.

Dies stimmt wiederum mit numerischen Beobachtungen überein.

c. Eine größere Klasse von Gleichungen

Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit lassen sich auch auf die allgemeinere Gleichung

$$\dot{x}(t) = \alpha g(x(t-1), x(t-3), \dots, x(t-2n-1)) \quad (\alpha g)$$

mit $g \in C^2(\mathbb{R}^{n+1})$, $n \in \mathbb{N}_0$ übertragen.

Ist nämlich $f(x) = g(x, -x, x, \dots, \pm x)$, $x \in \mathbb{R}$ ungerade, und sind $(x(\cdot, z), y(\cdot, z)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $z > 0$, $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ wie im Satz von Kaplan und Yorke (zu f), so ist durch

$$(\alpha(z), x(\cdot, z)|_{[0, 2n+1]}) \in \mathbb{R} \times C_n, \quad C_n = C([0, 2n+1])$$

ein Primärzweig symmetrischer Periode-4-Lösungen von (αg) gegeben, denn aus $x(t+2, z) = -x(t, z)$ folgt $x(t+2k, z) = (-1)^k x(t, z)$ für $(t, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$, $k \in \mathbb{Z}$, also:

$$\begin{aligned} \alpha g(x(t-1, z), x(t-3, z), \dots) &= \alpha g(x(t-1, z), -x(t-1, z), \dots) = \alpha f(x(t-1, z)) = \\ &= \dot{x}(t, z). \end{aligned}$$

Damit lassen sich alle Überlegungen und Ergebnisse übertragen, z.B. lautet Lemma 6.1(4):

$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist Eigenwert von W^2 genau dann, wenn es eine Lösung (η, ζ) von

$$\dot{\eta} = \alpha(z) h(\lambda, x_0^2) \zeta, \quad \eta(0) = \zeta(1)$$

$$\lambda \dot{\zeta} = \alpha(z) h(\lambda, y_0^2) \eta, \quad \lambda \zeta(0) = \eta(1)$$

gibt; dabei ist

$$h(\lambda, x) = f_1(x) + \frac{1}{\lambda} f_2(x) + \dots + \frac{1}{\lambda^n} f_{n+1}(x), \quad f_k(x) = \frac{\partial g}{\partial x_k}(x, -x, \dots)$$

für $x \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, n+1$.

Der Verzweigungssatz für (αg) würde so lauten:

Sei $g \in C^2(\mathbb{R}^{n+1})$, $n \in \mathbb{N}_0$ und

$$f(x) = g(x, -x, \dots, \pm x), \quad b(x) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} - 2 \frac{\partial g}{\partial x_2} + 3 \frac{\partial g}{\partial x_3} - \dots \right)(x, -x, x, \dots, \pm x)$$

für $x \in \mathbb{R}$.

f sei ungerade und $xf(x) < 0$ für $x \neq 0$.

Sei $(x, y): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die Kaplan-Yorke-Lösung zu $(\alpha(z)f)$ mit Amplitude $z > 0$. Gilt dann:

$$1. \alpha'(z) \neq 0$$

$$2. I = \int_0^1 [f^2(x) b(y) + f^2(y) b(x)] dt = 0$$

$$3. J = \int_0^1 [f'(x) b(y) + f'(y) b(x)] dt \neq 0,$$

so ist z differenzierbarer Verzweigungspunkt von (g) , bei dem symmetrische periodische Lösungen abzweigen.

Aus dem Beispiel von Abschnitt 11 läßt sich leicht ein Beispiel konstruieren, das diese Voraussetzungen erfüllt, z.B.

$$\dot{x}(t) = -2\alpha \frac{3x(t-1) \cdot x(t-3)}{4 - [3x(t-1) \cdot x(t-3)]^2}.$$

Weiter sei bemerkt, daß sich die Transformationen aus Abschnitt 12 ebenfalls anwenden lassen, so daß auch die Überlegungen von Abschnitt 12 und 13 richtig bleiben.

d. Ein Mittelwertsatz

Wir hatten im Beweis von Satz 10.1 eine Version des Mittelwertsatzes benutzt, die wir hier beweisen wollen:

Lemma 14.1

Sei ψ stetig und φ stetig differenzierbar und monoton auf $[a, b]$, $a < b$.

1. Dann gibt es $\xi \in [a, b]$ mit:

$$\int_a^b \varphi \psi dx = \varphi(a) \int_a^{\xi} \psi dx + \varphi(b) \int_{\xi}^b \psi dx .$$

2. Ist φ zusätzlich positiv, so gibt es $\xi \in [a, b]$ mit:

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi \psi dx &= \varphi(a) \int_a^{\xi} \psi dx && \text{falls } \varphi \text{ monoton fällt,} \\ &= \varphi(b) \int_{\xi}^b \psi dx && \text{falls } \varphi \text{ monoton steigt.} \end{aligned}$$

Beweis :

1. Satz 26 in [6], S. 29.

2. Sei $\varrho(x) = \varphi(b) \int_x^b \psi(u) du$ für $x \in [a, b]$, also $\varrho(a) = \varphi(b) \int_a^b \psi du$ und

$\varrho(b) = 0$. Sei $\bar{\xi} \in [a, b]$ wie in 1. und φ monoton steigend.

Wir dürfen o.B. $\int_a^b \varphi \psi dx \geq 0$ annehmen (sonst ersetzen wir ψ durch $-\psi$).

1. Fall: $\int_a^{\bar{\xi}} \psi dx \leq 0$.

Dann ist wegen $\varphi(a) > 0$: $\varphi(a) \int_a^{\bar{\xi}} \psi dx \leq 0$, also

$$\varrho(b) = 0 \leq \int_a^b \varphi \psi dx \leq \varphi(b) \int_{\bar{\xi}}^b \psi dx = \varrho(\bar{\xi}) ,$$

d.h. es gibt $\xi \in [\bar{\xi}, b]$ mit $\varrho(\xi) = \int_a^b \varphi \psi dx$.

2. Fall: $\int_a^{\bar{\xi}} \psi dx \geq 0$.

Dann ist $\varphi(a) \int_a^{\bar{\xi}} \psi dx \leq \varphi(b) \int_a^{\bar{\xi}} \psi dx$ und

$$\varrho(b) = 0 \leq \int_a^b \varphi \psi dx \leq \varphi(b) \left[\int_a^{\bar{\xi}} \psi dx + \int_{\bar{\xi}}^b \psi dx \right] = \varphi(b) \int_a^b \psi dx = \varrho(a) ,$$

d.h. es gibt ebenfalls $\xi \in [a, b]$ mit $\varrho(\xi) = \int_a^b \varphi \psi dx$. ■

e. Der Satz über die Verzweigung vom einfachen Eigenwert

Wir beweisen nun die von uns benutzte Version des Satzes über die Verzweigung vom einfachen Eigenwert, wobei wir die Beweisidee von Crandall-Rabinowitz ([4]) verwenden.

Bemerkung: Wir schreiben im folgenden kurz $h_z(z,x)$ für $Dh(.,x)(z)$ usw.

Satz 14.1

Sei B Banachraum, $z^* \in \mathbb{R}$, $J \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall um z^* und $U \subseteq B$ offene Umgebung von $0 \in B$. Sei $h: J \times U \rightarrow B$ stetig differenzierbar mit $h|_{J \times \{0\}} = 0$. Es gelte:

1. Es gibt stetiges $H: W \rightarrow B$, $W = \{(s,z,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times B \mid (z,sx) \in J \times U\}$ mit $h_z(z,sx) = s \cdot H(s,z,x)$ für alle $(s,z,x) \in W$.

2. $A^* = h_x(z^*, 0) \in L(B, B)$ ist Fredholmoperator mit Index 0.

3. Es gibt $b \in B$ mit $\text{Kern } A^* = \mathbb{R}b$ und $H(0, z^*, b) \in \text{Bild } A^*$.

Dann gibt es offenes $\hat{J} \times \hat{U} \subseteq \mathbb{R} \times B$ mit $(0,0) \in \hat{J} \times \hat{U}$, offenes $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $0 \in I$ und stetiges $(z,x): I \rightarrow \hat{J} \times \hat{U}$ mit

a. $z(0) = z^*$, $x(0) = 0$, $x(s) \neq 0$ für $s \in I \setminus \{0\}$,

b. (z,x) ist in $I \setminus \{0\}$ stetig differenzierbar, x ist in 0 differenzierbar mit $\dot{x}(0) = b$.

c. $h^{-1}(\{0\}) \cap (\hat{J} \times \hat{U}) = (\hat{J} \times \{0\}) \cup (z,x)(I)$.

Bemerkung: Aus der 1. Voraussetzung folgt, daß $J \ni z \mapsto h_x(z,0) b \in B$ differenzierbar ist mit $\frac{d}{dz} \Big|_z \cdot [h_x(z,0) b] = H(0, z^*, b)$.

Beweis:

1. Da h differenzierbar ist, gibt es stetiges $K: W \rightarrow B$ mit

$$h(z,sx) = h(z,0) + s \cdot K(s,z,x) = s \cdot K(s,z,x) \quad \text{für } (s,z,x) \in W,$$

$$K(0,z,.) = h_x(z,0) \in L(B, B) \quad \text{für } z \in J.$$

Für $s \in \mathbb{R}$ sei $W_s = \{(z,x) \in \mathbb{R} \times B \mid (s,z,x) \in W\} \subseteq \mathbb{R} \times B$ und

$$K(s, ...) = \{ W_s \ni (z,x) \mapsto K(s,z,x) \in B \}.$$

Behauptung: $K(s, ...)$ ist für alle $s \in \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit

$$DK(s, ...)(z,x)(\zeta, \xi) = \zeta \cdot H(s,z,x) + h_x(z,sx) \xi \quad \text{für alle } (z,x) \in W_s, (\zeta, \xi) \in \mathbb{R} \times B.$$

Beweis: Wir zeigen, daß für alle $s \in \mathbb{R}$ die partiellen Ableitungen von

$K(s, ...)$ nach z und x existieren, und daß gilt:

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} K(s, ...) \right](z,x) = H(s,z,x), \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} K(s, ...) \right](z,x) = h_x(z,sx);$$

da H und h_x stetig sind, folgt hieraus die Behauptung.

Sei $s \neq 0$; dann ist $W_s = J \times \frac{1}{s}U$, und für $(z,x) \in W_s$ gilt:

$K(s, \dots)(z, x) = K(s, z, x) = \frac{1}{s} h(z, sx)$, also

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} K(s, \dots) \right](z, x) = \frac{1}{s} h_z(z, sx) = H(s, z, x), \quad \left[\frac{\partial}{\partial x} K(s, \dots) \right](z, x) = h_x(z, sx).$$

Sei $s=0$; dann ist $W_s = J \times B$, und für $(z, x) \in W_s$ gilt:

$$K(0, \dots)(z, x) = h_x(z, 0)x, \text{ also ist } \left[\frac{\partial}{\partial x} K(0, \dots) \right](z, x) = h_x(z, 0).$$

Sei nun $u \in \mathbb{R}$ mit $z+u \in J$. Dann gilt:

$$h(z+u, x) = h(z, x) + u \cdot \int_0^1 h_z(z+tu, x) dt,$$

und da h differenzierbar ist, folgt:

$$\begin{aligned} K(0, \dots)(z+u, x) - K(0, \dots)(z, x) &= h_x(z+u, 0)x - h_x(z, 0)x = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [h(z+u, sx) - h(z, sx)] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} \cdot u \cdot \int_0^1 h_z(z+tu, sx) dt = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} u \cdot \int_0^1 H(s, z+tu, x) dt = u \cdot \int_0^1 H(0, z+tu, x) dt, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial z} K(0, \dots) \right](z, x) &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{u} [K(0, z+u, x) - K(0, z, x)] = \lim_{u \rightarrow 0} \int_0^1 H(0, z+tu, x) dt = \\ &= H(0, z, x) \end{aligned}$$

2. Hieraus folgt: $W \ni (s, z, x) \mapsto DK(s, \dots)(z, x) \in L(\mathbb{R} \times B, B)$ ist stetig, $DK(0, \dots)(z^*, b)(\zeta, \xi) = \zeta \cdot H(0, z^*, b) + A^* \xi$ für alle $(\zeta, \xi) \in \mathbb{R} \times B$, und es ist $H(0, z^*, b) = \left[\frac{\partial}{\partial z} K(0, \dots) \right](z^*, b) = \frac{d}{dz} \Big|_{z^*} [h_x(z, 0)b]$.

3. Sei nun $E \subseteq B$ abgeschlossener Unterraum mit $\mathbb{R}b \oplus E = B$. Wegen $(0, z^*, b) \in W$ gibt es offenes $\bar{W} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$ mit $(0, z^*, 0) \in \bar{W}$ und $(s, z, b+e) \in W$ für alle $(s, z, e) \in \bar{W}$. Sei $\bar{K}: \bar{W} \rightarrow B$ definiert durch $\bar{K}(s, z, e) = K(s, z, b+e)$ für $(s, z, e) \in \bar{W}$. Dann gilt $h(z, sb+se) = s \cdot \bar{K}(s, z, e)$ für alle $(s, z, e) \in \bar{W}$ und:

(i) $\bar{K}(0, z^*, 0) = K(0, z^*, b) = A^*b = 0$,

(ii) $\bar{K}$ ist stetig, $\bar{K}(s, \dots)$ ist für alle $s \in \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\bar{W} \ni (s, z, e) \mapsto D\bar{K}(s, \dots)(z, e) \in L(\mathbb{R} \times E, B)$ ist stetig,

(iii) $D\bar{K}(0, \dots)(z^*, 0)(\zeta, \eta) = \zeta \cdot H(0, z^*, b) + A^* \eta$ für $(\zeta, \eta) \in \mathbb{R} \times E$.

Mit Voraussetzung 3 ist $D\bar{K}(0, \dots)(z^*, 0) \in L(\mathbb{R} \times E, B)$ isomorph. Damit liefert der Satz über implizite Funktionen (vgl. Theorem 4.2 in [19]) offenes $\bar{I} \times \bar{J} \times V \subseteq \bar{W} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$ mit $(0, z^*, 0) \in \bar{I} \times \bar{J} \times V$ und eine stetige Abbildung $(z, e): \bar{I} \rightarrow \bar{J} \times V$ mit $z(0) = z^*$, $e(0) = 0$ und

$$\bar{K}^{-1}(\{0\}) \cap (\bar{I} \times \bar{J} \times V) = \text{graph}(z, e).$$

Wegen (ii) dürfen wir annehmen, daß $D\bar{K}(s, \dots)(z, e)$ ebenfalls isomorph ist für alle $(s, z, e) \in \bar{I} \times \bar{J} \times V$. Sei $s_0 \in \bar{I} \setminus \{0\}$, $z_0 = z(s_0)$, $e_0 = e(s_0)$. Dann gibt es ein offenes Intervall $I_0 \subseteq \bar{I} \setminus \{0\}$ mit $s_0 \in I_0$. Sei $\bar{K}_0 = \bar{K}|_{I_0 \times \bar{J} \times V}$,

also $\bar{K}_0(s, z, e) = \frac{1}{s} h(z, sb + se)$ für $(s, z, e) \in I_0 \times \bar{J} \times V$. Dies bedeutet, daß $\bar{K}_0$ stetig differenzierbar ist, und wegen $\bar{K}_0(s_0, z_0, e_0) = \bar{K}(s_0, z_0, e_0) = 0$,

$D\bar{K}_0(s_0, \dots)(z_0, e_0) = D\bar{K}(s_0, \dots)(z_0, e_0)$ ist $\bar{K}_0^{-1}(\{0\})$ lokal bei (s_0, z_0, e_0) der Graph einer C^1 -Kurve. Wegen der Eindeutigkeit der Lösungen ist dies aber die Kurve $(z, e)|_{\bar{I}_0}$ mit einem geeigneten offenen $\bar{I}_0 \subseteq I_0$ mit $s_0 \in \bar{I}_0$. Also ist (z, e) in allen $s_0 \in \bar{I} \setminus \{0\}$ stetig differenzierbar.

4. Sei $x: \bar{I} \ni s \mapsto s \cdot (b + e(s)) \in B$; x ist stetig, in $\bar{I} \setminus \{0\}$ stetig differenzierbar und in $s=0$ differenzierbar mit $x(0)=0$, $\dot{x}(0)=b$. Für $s \in \bar{I}$ gilt:

$$h(z(s), x(s)) = h(z(s), s \cdot (b + e(s))) = s \cdot K(s, z(s), b + e(s)) = s \cdot \bar{K}(s, z(s), e(s)) = 0.$$

Weiter ist $x(s) \neq 0$ für $s \in \bar{I} \setminus \{0\}$, denn sonst ist $b = -e(s) \in B \cap E = \{0\}$, also $b=0$ und mit 2. $H(0, z^*, 0) = 0 \in \text{Bild } A^*$.

5. Sei $\epsilon > 0$ mit $\{e \in E \mid \|e\| < \epsilon\} \subseteq V$.

Behauptung: Es gibt offenes $\hat{J} \times \hat{U} \subseteq \mathbb{R} \times B$ mit $(z^*, 0) \in \hat{J} \times \hat{U}$ und $\hat{J} \subseteq \bar{J}$, so daß für alle $(w, y) \in h^{-1}(\{0\}) \cap (\hat{J} \times \hat{U})$ gilt:

$$\text{Ist } y = tb + e \in B \oplus E, \text{ so ist } t \in \bar{I} \text{ und } \|e\| \leq \frac{\epsilon}{2} |t|.$$

Beweis: Wir zeigen nur: Es gibt offenes $\hat{J} \times \hat{U} \subseteq \mathbb{R} \times B$ mit $\|e\| \leq \frac{\epsilon}{2} |t|$ für alle $(w, t, e) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times E$ mit $(w, tb + e) \in h^{-1}(\{0\}) \cap (\hat{J} \times \hat{U})$; $\hat{J} \subseteq \bar{J}$ und $t \in \bar{I}$ ergibt sich dann durch Verkleinern von $\hat{J}$ und $\hat{U}$, da $B \oplus E \ni tb + e \mapsto t \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Sei $\bar{b} = H(0, z^*, b) \in B$. Dann ist (vgl. 3. (iii)) $\mathbb{R} \times E \ni (t, \eta) \mapsto t\bar{b} + A^*\eta \in B$ isomorph und es gibt $c > 0$ mit $\|t\bar{b} + A^*\eta\| \geq c \cdot (|t| + \|\eta\|)$ für alle $(t, \eta) \in \mathbb{R} \times E$.

Sei $\epsilon' \in]0, \frac{1}{2}c[$ so, daß $\frac{2\epsilon' \|b\|}{c-3\epsilon'} \leq \frac{1}{2}\epsilon$ gilt. Da h_x in $(z^*, 0) \in \mathbb{R} \times B$ stetig ist, gibt es offenes $\hat{J} \times \hat{U} \subseteq \mathbb{R} \times B$ mit $(z^*, 0) \in \hat{J} \times \hat{U}$ und $\|h_x(w, y) - A^*\| < \epsilon'$ für alle $(w, y) \in \hat{J} \times \hat{U}$. Insbesondere ist $\|h_x(w, 0) - A^*\| < \epsilon'$ für alle $w \in \hat{J}$, und für alle $(w_1, y_1), (w_2, y_2) \in \hat{J} \times \hat{U}$ gilt:

$$\|h_x(w_1, y_1) - h_x(w_2, y_2)\| \leq \|h_x(w_1, y_1) - A^*\| + \|h_x(w_2, y_2) - A^*\| < 2\epsilon'.$$

Wegen $h_x(z^*, 0)b = A^*b = 0$ und $\bar{b} = \frac{d}{dz}|_{z^*} [h_x(z, 0)b]$ dürfen wir weiter $\|h_x(w, 0)b - (w - z^*) \cdot \bar{b}\| \leq c|w - z^*|$ für $w \in \hat{J}$ annehmen.

Sei nun $(w, tb + e) \in h^{-1}(\{0\}) \cap (\hat{J} \times \hat{U})$. Mit $u = w - z^*$ gilt dann:

$$\begin{aligned} -[t \cdot u \cdot \bar{b} + A^*e] &= [h(w, tb + e) - h(w, 0) - h_x(w, 0)(tb + e)] + [h_x(w, 0)(tb) - t \cdot u \cdot \bar{b}] + \\ &\quad + h_x(w, 0)e - A^*e, \end{aligned}$$

und mit der Taylorformel folgt ($\hat{U}$ o.B. konvex):

$$c \cdot (|t \cdot u| + \|e\|) \leq \| -[t \cdot u \cdot \bar{b} + A^*e] \| \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \|h(w, tb + e) - h(w, 0) - h_x(w, 0)(tb + e)\| + |t| \cdot \|h_x(w, 0)b - u \cdot \bar{b}\| + \\ &\quad + \|h_x(w, 0) - A^*\| \|e\| \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \leq \left\| \int_0^1 [h_x(w, \sigma tb + \sigma e) - h_x(w, 0)](tb + e) d\sigma \right\| + |t| \cdot c \cdot |u| + \varepsilon' \|e\| \leq \\ & \leq 2\varepsilon' (|t| \cdot \|b\| + \|e\|) + c |t \cdot u| + \varepsilon' \|e\| = \\ & = 2\varepsilon' |t| \cdot \|b\| + 3\varepsilon' \|e\| + c |t \cdot u| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (c - 3\varepsilon') \cdot \|e\| \leq 2\varepsilon' |t| \cdot \|b\| \Rightarrow \|e\| \leq \frac{2\varepsilon' \|b\|}{c - 3\varepsilon'} |t| \leq \frac{1}{2} \varepsilon |t|.$$

6. Sei $I = (z, x)^{-1}(\hat{J} \times \hat{U})$; wegen $(z, x)(0) = (z^*, 0) \in \hat{J} \times \hat{U}$ ist $I \subseteq \mathbb{R}$ offene Umgebung von $0 \in \mathbb{R}$. Damit gilt:

$$(\hat{J} \times \{0\}) \cup (z, x)(I) \subseteq h^{-1}(\{0\}) \cap (\hat{J} \times \hat{U}).$$

Sei $(w, y) \in h^{-1}(\{0\}) \cap (\hat{J} \times \hat{U})$ und $y = tb + e$ mit $t \in \mathbb{R}, e \in \mathbb{R}$. Dann ist $t \in \bar{I}$ und $\|e\| \leq \frac{\varepsilon}{2} |t|$.

Ist $t = 0$, so folgt $\|e\| \leq 0$, also $e = 0$ und $y = 0$, d.h. es ist $(w, y) \in \hat{J} \times \{0\}$.

Ist $t \neq 0$, so folgt $\|\frac{1}{t}e\| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$, also $\frac{1}{t}e \in V$ und

$0 = h(w, y) = h(w, t \cdot (b + \frac{1}{t}e)) = t \cdot \bar{K}(t, w, \frac{1}{t}e)$, d.h. es ist $\bar{K}(t, w, \frac{1}{t}e) = 0$. Mit $t \in \bar{I}$,

$w \in \hat{J}, \frac{1}{t}e \in V$ folgt: $(t, w, \frac{1}{t}e) \in \bar{K}^{-1}(\{0\}) \cap (\bar{I} \times \bar{J} \times V) = \text{graph}(z, e)$, d.h. es ist

$w = z(t), e = t \cdot e(t), y = t \cdot (b + e(t)) = x(t)$, also $(z(t), x(t)) = (w, y) \in \hat{J} \times \hat{U}$.

Damit ist $t \in I$ und $(w, y) = (z(t), x(t)) \in (z, x)(I)$. ■

Corollar 14.1

Ist h C^k -Abbildung, $k \in \mathbb{N}$, so sind z, x C^{k-1} -Abbildungen und in $I \setminus \{0\}$ k -mal stetig differenzierbar; x ist in $s=0$ k -mal differenzierbar.

Ist $k \geq 2$, so ist die 1. Bedingung von Satz 14.1 stets erfüllt.

SYMBOLVERZEICHNIS

es bedeuten :	erstes Auftreten
$C(\mathbb{R})$	: die stetigen Abbildungen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,
$C^k(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}_0$	: die k-mal stetig differenzierbaren Abbildungen $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
$C = C([0,1])$	: die stetigen Abbildungen $[0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ 9
C_0	: $\varphi \in C$ mit $\varphi(0) = 0$ 24
$1_{\mathbb{B}}$	: die Identität $\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$, $\mathbb{B}$ Banachraum
$\phi(x,z)$	: die kanonische Involution 77
$j(z)$	: die Halbzeitabbildung 80
$L(C,C)$, $L(C_0,C_0)$	: die linearen und stetigen Abbildungen $C \rightarrow C$ bzw. $C_0 \rightarrow C_0$
P^α , Q^α	: die Poincaréabbildung bzw. die halbe Poincaréabbildung 27
$PZ(f) \subseteq \mathbb{R}^+ \times C_0$	: der Kaplan-Yorke-Zweig der symmetri- schen Periode-4-Lösungen 42
$S^\lambda(.,z)$	: die Fundamentallösung des Variations- problems 54
$T^\alpha(t,\varphi) = x_t^\alpha(\varphi)$	: der durch die verzögerte Gleichung definierte Halbfluß auf C 14
$U^\alpha(.,\varphi,\xi)$	: die Lösung des linearen Anfangswert- problem 21 $\dot{u}(t) = \alpha f'(x^\alpha(t-1,\varphi) u(t-1))$, $u _{[0,1]} = \xi$
U^z , V^z , W^z	: verschiedene Operatoren aus $L(C,C)$ bzw. $L(C_0,C_0)$ 47
$x(.,z) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	: die Kaplan-Yorke-Lösung mit Amplitude z 33
$x^\alpha(.,\varphi) : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$	: die Lösung des Anfangswertproblem 13 $\dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1))$, $t \geq 1$, $x _{[0,1]} = \varphi \in C_0$
$x_t^\alpha(\varphi) = x^\alpha(t+.,\varphi) _{[0,1]}$	: der Abschnitt von $x^\alpha(.,\varphi)$ zwischen t und t+1 13
$\frac{d}{du} _{u^*} \circ \frac{\partial}{\partial u} _{u^*}$	: Ableitung nach u bei $u = u^*$

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Abramowitz, M., Stegun, I.A., *Handbook of mathematical functions*. New York : Dover Publ. (1968)
- [2] Angelstorf, N., in: *Functional differential equations and approximations of fixed points*. Proceedings, Bonn 1978, Ed. by H.O. Peitgen and H.O. Walther, Lecture notes in mathematics 730, Springer (1979)
- [3] Byrd, P., Friedman, M., *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists*, Springer (1954)
- [4] Crandall, M.G., Rabinowitz, P.H., *Bifurcation from Simple Eigenvalues*. J. of Functional Analysis 8, 321-340 (1971)
- [5] Dormayer, P., *Exact formulae for periodic solutions of $\dot{x}(t+1) = \alpha(-x(t) + b x^j(t))$* . ZAMP 37, 765-775 (1986)
- [6] Erwe, F., *Differential und Integralrechnung*. Bd. 2, BI-Hochschultaschenbuch, Bd. 31, (1962)
- [7] Hadeler, K.P., *Effective Computation of periodic orbits and bifurcation diagrams in delay equations*. Numer. Math. 34, 457-467 (1980)
- [8] Hale, J.K., *Theory of Functional Differential Equations*. New York-Heidelberg-Berlin, Springer (1977)
- [9] Hutchinson, G.E., *Circular causal systems in ecology*. Annals of the New York Academy of Sciences, 50, 221 (1948)
- [10] Jones, G.S., *Periodic motions in Banach space and applications to functional differential equations*. Contr. Diff. Equ. 3, 75-106 (1964)
- [11] Kaplan, J.L., Yorke, J.A., *Ordinary differential equations which yield periodic solutions of differential delay equations*. J. Math. Anal. Appl. 48, 317-324 (1974)
- [12] Lasota, A., Wazewska-Czyżewska, M., *Matematyczne problemy dynamiki układu krwinek czerwonych*. Mat. Stosowana 6, 23-40 (1976)
- [13] Mackey, M.C., Glass, L., *Oscillations and chaos in physical control systems*. Science 197, 287-289 (1977)
- [14] Nussbaum, R.D., Peitgen, H.O., *Special and Spurious Solutions of $\dot{x}(t) = -\alpha f(x(t-1))$* . Forschungsschwerpunkt "Dynamische Systeme", Report Nr. 91
- [15] Sartori, C., *Asymptotic analysis of delay-differential equations*. Manuscripta Math. 38, 225-238 (1982)
- [16] Saupe, D., *Global Bifurcations of Periodic Solutions to some Autonomous Differential Delay Equations*. Forschungsschwerpunkt "Dynamische Systeme" Report Nr. 71 (1982)
- [17] Walther, H.O., *A theorem on the amplitudes of periodic solutions of differential delay equations with application to bifurcation*. J. Diff. Equ. 29, 394-404 (1978)
- [18] Walther, H.O., *Bifurcation from Periodic Solutions in Functional Differential Equations*. Math. Z. 182, 269-289 (1983)
- [19] Zeidler, E., *Vorlesung über nichtlineare Funktionalanalysis I, Fixpunktsätze*. Teubner (1976)

LEBENS LAUF

geboren am	30.5.1958
in	München
1964 - 1968	Volkschule Pullach
1968 - 1977	Klenze-Gymnasium München
Mai 1977	Abitur am Klenze-Gymnasium
Juli 1977 - Sept. 1978	Bundeswehr
Feb. 1978	Bundessieger im Bundeswettbewerb Mathematik, dadurch Aufnahme in Studienstiftung des deutschen Volkes
Mai 1978	Zweiter im Bundeswettbewerb Jugend forscht / Mathematik
seit WS 1978 / 1979	Studium der Mathematik mit Nebenfach Physik an der Universität München
19. Dez. 1984	Diplom in Mathematik
seit 1.8.1987	wiss. Assistent am mathematischen Institut der Universität München

